Årg. 34: 2 Juni 1951

ELEMENTA

Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16IV STOCKHOLM

ANDRA HÄFTET

ERICH ADLER, Om diensyntesen. Nobelpriset i kemi 1950 81
K.-G. HAGSTROEM, Om kvasiellipsen 87
BENGT LILJEQVIST, Interferensförsök med mikrovågor 91
JOHN HAGSTRÖM, Om uppdelning i stambråk 95
SVEN ALGÉUS, Osmotiskt tryck och osmotiskt värde 97
Bokanmälningar: HASSE, Höhere Algebra; BEAUREGARD, La théorie de la relativité restreinte; MCVITTIE, Cosmological Theory; APPELL, Analyse mathématique; Analogimaskiner; BLANC-DELHOUME, La vie émouvante et noble de Gay-Lussac; WIENER, The Human Use of Human Beings; WALCHER, Das Trockengleichrichter-Vielfachmessgerät; PRINGSHEIM-VOGEL, Luminiszenz von Flüssigkeiten und festen Körpern; SPRING, Photons and Electrons; TWYMAN, Metal Spectroscopy; HOPKINS, Wave Theory of Aberrations; WINGÅRDH, Ljuset, dess natur och egenskaper; LINDSTAD, Fysikk og kjemi; FREUDENBERG, Organische Chemie; JAFFE, The Story of Chemistry; WINGÅRDH, Underliga ämnen; MCKAY, Leksaker och uppfinningar; Statens institut för folkhälsan 109
Recensenter i detta häfte 125
Gradualavhandlingar (autoreferat): C. V. JONSSON, Studies on five-dimensional relativity theory; E. LYTTKENS, Problems of dark nebulae, treated by the method of moments 126
Tidskrifter, innehållsöversikt 128
Problemavdelning:
Matematiska problem (red. av S. BÅGMAN) 129
S. B., Om trerektangulärt hörn 132
Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentexamen mars 1951 133
Realexamen v. t. 1951: Provräkning 140
Praktisk realexamen v. t. 1951: Uppgifter i fysik och Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära 141
Insänd litteratur 144

Elementa, fullständig årg. serie 1—32 i 16 klotbd kr. 425:—

Pris pr år kr. 10:— pr häfte kr. 3:—

ELEMENTA

Årligen fyra häften (mars, juni, sept., dec.). Subskription enklast genom inbetalning å postgiro 527 55; pr år 10 kr., pr häfte 3 kr. Tidskriften sändes som utgivarkorsband.

Pärmar av grön klot à 2:50; varje pärm är avsedd för två årg.: 1—2, 3—4, osv.

Vid behov av *äldre årg.* vänd Eder direkt till red. med en förfrågan. Av årg. 1—12 äro flera ofullständiga. Priset är för årg. 13—30 kr. 8 pr årg. samt för årg. fr.o.m. 31 (1948) kr. 10. Inb. årg. enl. offert.

Red.-kommitté: professor G. Borelius, adjunkt S. Bågman, byrådirektör S. Comét, lektor G. Starck, professor J. Tandberg och lektor A. Wahlgren. Redaktör och utgivare: C. E. Blom. Red. o. exp. Karlbergsv. 16, Stockholm.

Särtryck ur ELEMENTA:

1. A. Nordhult, De viktigaste konstruktions- och driftsegenskaperna hos likströmsmaskinerna, kr. 1:—.
2. M. Sjöström, Vätskors och gasers strömning, kr. 1:—.
3. M. Sundqvist, Teorien för de moderna glasögonen, kr. 1:—.
4. J. Tandberg, Om vinkelns tredelning. Slut.
5. G. Ljunggren, Gasskyddets kemi kr. 0:80.
6. S. Comét, Matrisräkning, kr. 1:60
7. H. Henrikson, Om segelflygning och dess energikällor i atmosfären, kr. 2:40.
8. K.-B. Augustinsson, Vitaminernas kemi, kr. 1:40.
9. L. G. Sillén, Kemiska reaktionsformler, kr. 1:40.
10. L. G. Sillén, Kemistens hjärna - ett utrymmesproblem, kr. 1:40.
11. C.-E. Fröberg—G. Kjellberg—O. Boivie, Siffermaskiner och hålkortsmaskiner, kr. 3:—.

Problemhäften för åren 1943—49 à 80 öre, för 1950 à 1 kr. Innehåll: Student- o. realex.uppg. i matem. o. fysik med svar och anvisningar.
I *porto* tillkommer 10 öre pr särtryck.

K. A. Wingårdh

UNDERLIGA ÄMNEN

Några blad ur vetenskapens historia

»Volymen är lättläst, instruktiv och underhållande utan att därför ge avkall på saklig vederhäftighet och pedagogisk klarhet.»

Norrköpings Tidningar.

N.o.K.-serien.
Illustr. 5:50, inb. 7:50

Herbert McKay

LEKSAKER OCH UPPFINNINGAR

Förf. påvisar hur leksaker ofta innehåller fröet till verkliga och betydelsefulla uppfinningar, ur vilka sedan vår tekniks förbluffande resultat framsprungit.

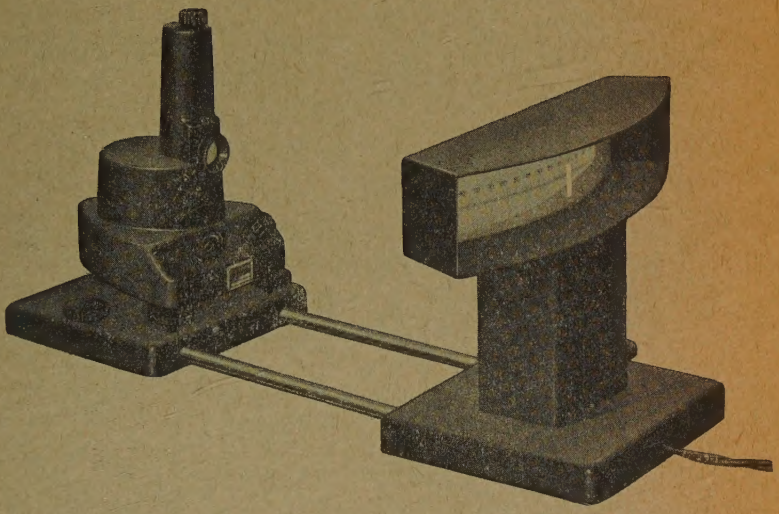
»Under förf:s skickliga ledning får man spåra några av samtida tekniks mest geniala påfund tillbaka till enkla leksaker... en skarpsinnig experimentator...

Skånska Dagbladet.

Illustr. 7:50, inb. 9:25

En bok från NATUR och KULTUR är en god bok

Elektriska mätinstrument i stort urval



Spegelgalvanometer med belysnings- och avläsningsanordning, försedd med glödlampa 4 volt 1 ampere och transformator för direkt anslutning till växelströmsnät.

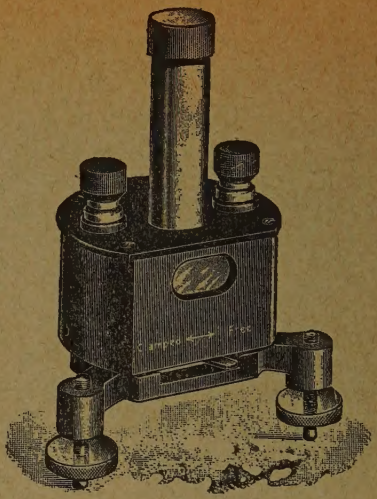
P. A. NORSTEDT & SÖNER

Skolavdelningen -:- Stockholm

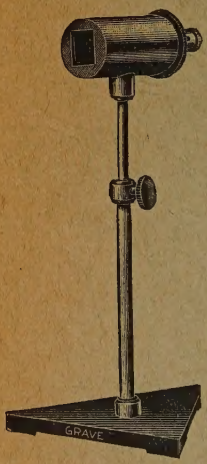
Utställning och Lager

av all slags
materiel för

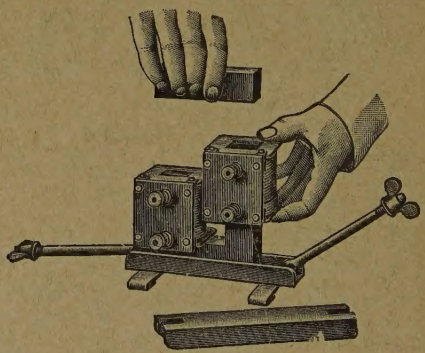
Fysikunder-visningen



Spegelgalvanometer med
vridspolesystem

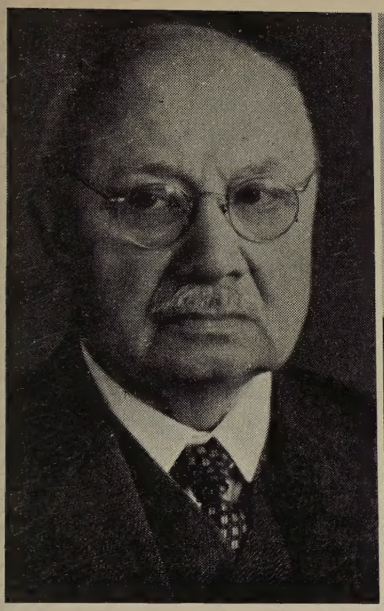


Termostapel
enl. Holjer Witt



Söndertagbar transformator

RUDOLPH GRAVE A/B
STOCKHOLM 3



Otto Diels

Kurt Alder

Nobelpriset i kemi 1950

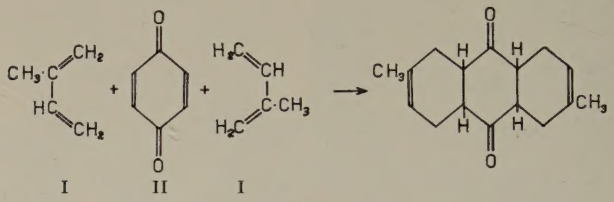
Om diensyntesen

Av docent Erich Adler, Stockholm

Vetenskapsakademien tilldelade de båda tyska kemisterna Otto Diels och Kurt Alder 1950 års Nobelpris i kemi för upptäckten och vidareutvecklingen av diensyntesen. Den forskargärning som därmed belönats har berikat den organiska kemien med en elegant och mångsidigt användbar preparativ metod, som öppnat vägen till ett nära nog obegränsat antal synteser. Samtidigt har dienreaktionen blivit ett enkelt och tillförlitligt instrument i strukturforskningens tjänst. Den har därutöver bidragit till att fördjupa vår insikt i vissa reaktioners mekanism, framförallt polymerisationsreaktionernas, och har även avsatt betydelsefulla spår inom den tekniska organiska kemiens områden.

Enstaka iakttagelser rörande reaktioner mellan dienföreningar och andra omättade ämnen finner man långt tillbaka i den

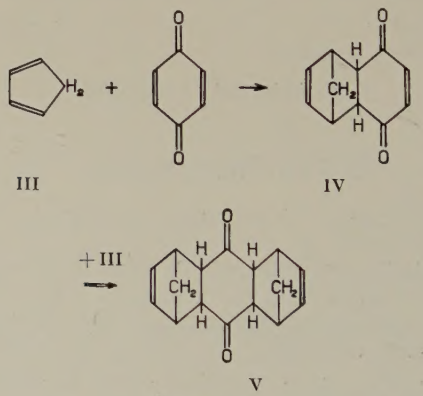
organisk-kemiska litteraturen. Bland dem förtjänar emellertid den av H. v. Euler och K. Josephson (1) år 1920 beskrivna reaktionen mellan 2 mol. isopren (I) och 1 mol. kinon (II) särskilt intresse, ej blott av den anledningen att den utförts i Sverige utan framförallt därför att diensyntesens princip här för första gången riktigt formulerats (fig. 1):



I II I

Fig. 1.

I sitt första gemensamma meddelande (2), som utgör en programförklaring till den långa raden av deras berömda undersökningar angående diensyntesen, visade Diels och Alder år 1928 bl. a., att cyklopentadien (III) anlagras till kinon på analogt sätt som isopren (fig. 2):

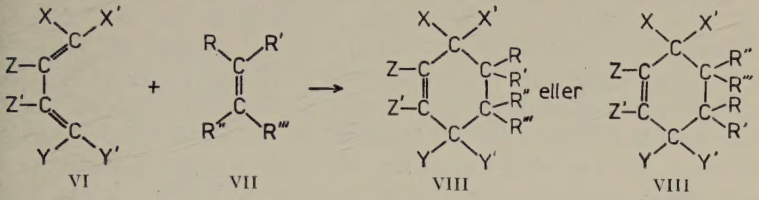


III IV V

Fig. 2.

På dessa grundvalar uppförde Diels och Alder under de följande åren diensyntesens mäktiga byggnad, ett synnerligen rikt facetterat mästerverk av organisk-kemisk arkitektur. Forskare i laboratorier över hela världen lämnade med tiden allt fler bidrag till ett vidgande av byggnadsverket, som ännu i dag befinner sig i stadig tillväxt.

Diensyntesens allmänna princip åskådliggöres av följande schema: en »dien» (VI) adderas till en »filodien» (numera ofta betecknad som »dienofil») (VII) under bildning av en »addukt» (VIII), som innehåller en hydroaromatisk sexring (fig. 3):

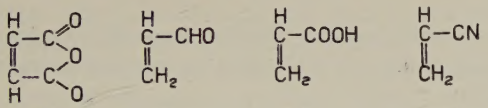


VI VII VIII VIII

Fig. 3.

Den stora byggnadens rikedom i färg och form har sin orsak i de mångfaldiga möjligheterna att variera dienens och dienofilens substituenter.

Redan tidigt visade det sig, att även alifatiska olefiner, som t. ex. maleinsyra, maleinsyreanhydrid (IX), akrolein (X), akrylsyra (XI), akrylnitril (XII) och deras substitutionsprodukter fungerade som dienofiler på samma sätt som kinoner (fig. 4):

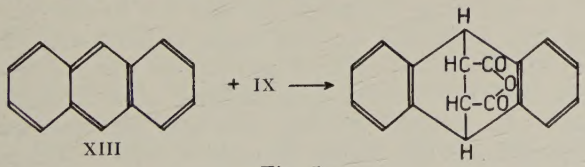


IX X XI XII

Fig. 4.

Men icke blott sådana av omättade substituenter, som karbonyl- eller nitrilgrupper, aktiverade etylenföreningar, utan även substanser av typen allylalkohol, allylacetat, allylamin, ja, under energiska reaktionsbetingelser även etylen själv, kunna anlagras till diener.

Vad dienkomponenten beträffar så kan butadienet, dienernas prototyp, ersättas icke enbart av dess alkyl- och arylderivat samt av cykliska diener (såsom cyklopentadien, cyklohexadien, cyklooktatetraen) utan även av polycykliska aromatiska kolväten, som antracen (XIII), tetracen, osv. (fig. 5).

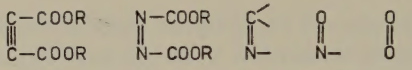


XIII

Fig. 5.

Även vissa heterocykler såsom furan och vissa derivat av tiofen addera dienofiler; pyrrol däremot reagerar på ett avvikande sätt. Bensolens system av dubbelbindningar visar ingen benägenhet att fungera såsom dienkomponent.

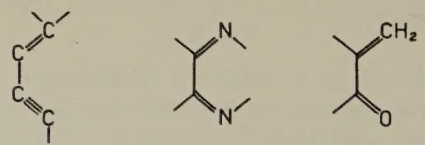
Samtidigt som man stött på dylika gränser för dienreaktionen, ha dess möjligheter även avsevärt vidgats utöver den av det allmänna grundschemat (VI→VIII) angivna planen. Så reagera t. ex. acetylenderivat, såsom acetylendikarbonsyreester (XIV), på samma sätt som maleinsyra; i stället för en enkelbindning kommer addukten i detta fall att innehålla en dubbelbindning i dienofilresten. Det har vidare visat sig, att en eller bägge C-atomerna i dienofilens omättade grupp kunna ersättas av N eller O, dvs. den dienofila komponenten kan vara exempelvis azodikarbonsyreester (XV) eller en förening innehållande grupperna XVI resp. XVII, eller t. o. m. molekylärt syre (fig. 6).



XIV XV XVI XVII

Fig. 6.

På liknande sätt kan även dienkomponenten varieras; den kan sålunda vara en »enin» (XVIII) eller representeras av typerna XIX och XX (fig. 7):



XVIII XIX XX

Fig. 7.

Det är givetvis omöjligt att i denna flyktiga skiss mer än antyda dienreaktionens rika möjligheter. I själva verket uppgå de enstaka diener och dienofiler som undersökts av Diels och Alder samt andra forskare till flera hundra (jfr översiktsartiklarna 3—6). Man inser lätt, att de otaliga kombinationer som här ha prövats lett till en mängd nya substanser av ofta högst ovanlig struktur, vilka tidigare ej alls eller kanske endast med mycket stor svårighet varit tillgängliga. Det bör i detta sammanhang även framhållas, att diensyntesen ofta förlöper frivilligt, dvs. utan kondensationsmedel och vid rumstemperatur; endast då mindre reaktiva komponenter

skola omsättas, erfordras förhöjd temperatur. Man förstår, att Diels själv inte tvekade att beteckna diensyntesen som »ein ideales Aufbauprinzip organischer Stoffe» (7).

Det förefaller, som om Otto Diels i dienreaktionen från första början såg ett nytt medel att tränga fram till syntetiskt svårtillgängliga grupper av hydroaromatiska naturämnen. Så framställdes redan 1929 ett violdoftande ämne (XXII) av jonontyp genom omsättning av 1,3-dimetylbutadien med krotonaldehyd samt kondensation av den erhållna addukten (XXI) med aceton (fig. 8):

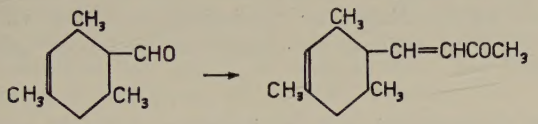


Fig. 8.

Möjligheten att med lätthet kunna bygga upp molekyler med enkla eller förgrenade bryggor inom ringarna (jfr formler IV och V) utnyttjades till att syntetisera substanser tillhörande kamfergruppen, såsom borneol, kamfer, santen. Andra forskare begagnade sig av dienreaktionen för syntetiska framstötar inom steroidgruppen. Sålunda erhölls av 6-metoxi-1-vinyl-3,4-dihydronaftalin (XXIII) och 2-metylcyklopenten-3,4-dion (XXIV) en addukt, som kunde överföras till en stereoisomer av sexualhormonet östron (XXV) (fig. 9):

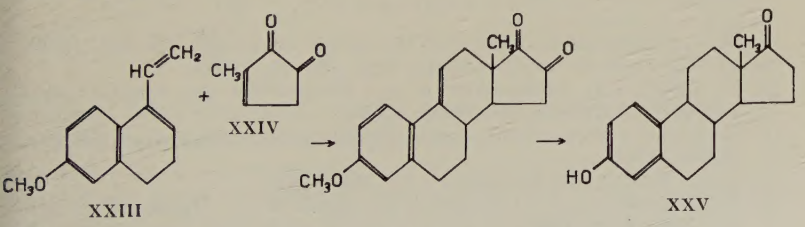


Fig. 9.

K. Alder har, huvudsakligen tillsammans med G. Stein, med stor framgång studerat de steriska förhållanden som gälla vid dienreaktionen. Det skulle föra för långt att här närmare ingå på dessa utomordentligt vackra arbeten, som resulterade i uppställandet av några allmänna regler (»Alder's regler»).

Diels-Alder-reaktionen är, som redan nämnts, icke endast en ovanligt fruktbar syntesmetod, utan den har även blivit av stor

betydelse för strukturforskningen, där den i första hand utgör en säker och lätt utförbar metod att påvisa konjugerade dubbelbindningar. Med bestämningen av »dientalet» har metoden fått sin analytiska tillämpning inom fett- och oljekemien.

Tekniken har på skilda områden dragit nytta av dienreaktionens möjligheter. Det kan exempelvis nämnas, att man ur hartssyror eller polyterpener som dienkomponenter och maleinsyreanhydrid som dienofil har framställt polykarbonsyror, vilka vid förestring med polyalkoholer ge plastlacker av hög kvalitet. Inom petroleumindustrien synes Diels-Alder-reaktionen kunna användas för borttagandet av dienfraktioner ur crackningsprodukter, vilket är av betydelse vid framställning av flygbensin med högt »oktantal».

Professor emeritus Otto Diels, född 1878, är lärjunge till Emil Fischer. Under 33 år var han professor i organisk kemi och föreståndare för kemiska institutionen vid universitetet i Kiel.

Professor Kurt Alder är född i Königshütte, Oberschlesien, 1902. Han studerade kemi vid universiteten i Berlin och Köln. 1926 promoverades han till Dr. phil. i Kiel, där han utnämndes till professor 1934. Under en följd av år var han chef för en avdelning i Farbwerke Bayer's vetenskapliga laboratorium och kallades därifrån till professor och chef för det kemiska institutet vid universitetet i Köln.

Litteratur

(1) H. v. Euler och K. Josephson, Ber. dtsch. chem. Ges. *53*, 822 (1920).
(2) O. Diels och K. Alder, Liebig's Ann. *460*, 98 (1928).
(3) O. Diels, i L. Zechmeister et al., Fortschritte der Chemie organischer Naturstoffe, III, Wien, 1939.
(4) K. Alder, i Neuere Methoden der präparativen organischen Chemie, Berlin, 1943.
(5) J. A. Norton, Chem. Reviews *31*, 319 (1942).
(6) M. C. Kloetzel, H. L. Holmes, i R. Adams et al., Organic Reactions, IV, New York, 1948.
(7) O. Diels, Z. angew. Chemie *42*, 911 (1929).

Om kvasiellipsen

Av fil. dr K.-G. Hagstroem, Stockholm

Följande redogörelse för en praktisk ritkonstruktion har måhända intresse för elementarundervisningen. Jag meddelar den därför åt kollegerna alldeles avskild från det samband med vågekvationen, som föranlett mig att syssla med problemet. Jag tror att konstruktionen kan göras till utgångspunkt för tillämpningar och beräkningar, som passa till enskilda arbeten.

En kurva betraktas i geometrien som sammanfattning av dess punkter. Enligt en annan aspekt på geometrien är kurvans element den tangerande räta linjen: linjegeometri. Man kan också anse en kurva som inbegreppet av dess krökningscirklar (vilkas medelpunkter bilda evolutan), och till denna åskådning anknyter den betraktelse, som för till kvasiellipsen.

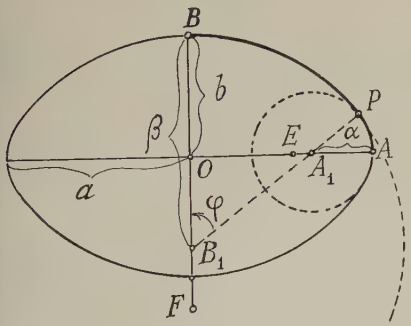


Fig. 1. Konstruktion av ett förstadium till kvasiellipsen. $a=6$, $b=4$ ger, om α väljes $=2$, enl. formel (1) $\beta=7$.

Låt i fig. 1 $OA=a$ och $OB=b$ vara halvaxlarna av en ellips. På OA är en punkt E markerad så, att $AE=b^2:a$ är krökningsradien för storaxelns ändpunkt, på förlängningen av OB en punkt F så, att $BF=a^2:b$. Punkterna E och F äro två av de fyra spetsarna av den astroid, som är ellipsens evoluta. De komma att spela en gästroll i det följande men ha ingenting väsentligt att göra med kvasiellipsens konstruktion, vilken kan förklaras utan att tala om krökningen.

Välj nu en godtycklig punkt A_1 på OA, så att AA_1 är en godtycklig parameter$=\alpha$. Rita med A_1 som medelpunkt en cirkel genom A. Man kan bestämma en punkt B_1 på förlängningen av BO, så att

en cirkel genom B och med B_1 till medelpunkt tangerar den först ritade cirkeln i en punkt P. Kalla den sökta sträckan BB_1 för β och vinkeln PB_1B för φ. Ur triangeln A_1OB_1 erhålles $(a-\alpha)^2+(\beta-b)^2=(\beta-\alpha)^2$ och således för bestämningen av β ur α relationen

$$\beta=(a^2+b^2-2a\alpha):2(b-\alpha) \tag{1}$$

Man kan nu föresätta sig att försöka bestämma α (och därmed β) så, att punkten P faller på ellipsen. Lyckas man i denna föresats, så har man tydligen fått ett par cirkelbågar i första kvadranten, vilka ganska väl kunna ersätta ellipsbågen. Den av fyra cirkelbågar bestående figur, som erhålles genom att upprepa konstruktionen i alla kvadranterna, synes mig därför kunna förtjäna namnet *kvasiellipsen*. Jag återkommer till frågan om namnet, sedan konstruktionen bevisats vara genomförbar.

Punkten P har y-koordinaten $\alpha(\beta-b):(\beta-\alpha)$ och x-koordinaten $\beta(a-\alpha):(\beta-\alpha)$. Sätter man in dem i ellipsens ekvation, får man för bestämmande av α och β en ekvation, som tillsammans med (1) bildar ett ekvationssystem, där ekvationerna kunna ges följande symmetriska form:

$$\begin{aligned} &2\cdot\alpha\cdot\beta-2\cdot a\cdot\alpha-2\cdot b\cdot\beta+a^2+b^2=0\\ &2\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}-2\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\alpha}-2\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Systemet är ej så svårt att lösa. Man finner

$$a\cdot\alpha=\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{a-b}{4}\sqrt{a^2+6ab+b^2}$$

$$b\cdot\beta=\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{a-b}{4}\sqrt{a^2+6ab+b^2}$$

Geometriskt intressant är att konstatera, att man kan skriva lösningen

$$\alpha=q\cdot\frac{b^2}{a}+(1-q)\cdot b,\quad \beta=\frac{1}{2q}\cdot\frac{a^2}{b}+\left(1-\frac{1}{2q}\right)\cdot a \tag{3}$$

där man alltså bildat vägda medeltal av axlarna och astroidens avstånd till topparna, och villkoret, som definierar kvasiellipsen, uttryckes därigenom att talet q är bestämt av axelförhållandet $t=b:a$ på följande sätt:

$$q=(\sqrt{t^2+6t+1}-1+t):4t. \tag{4}$$

För beräkning av φ får man omedelbart ur triangeln A_1B_1O, i fig. 1, att $\operatorname{tg}\varphi=(a-\alpha):(\beta-b)$, och insättning av de ovan funna värdena på α och β ger följande formler:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi&=[(1+t)^2-(1-t)\sqrt{t^2+6t+1}]:4t=1-q(1-t)\\ \operatorname{cot}\varphi&=[(1+t)^2+(1-t)\sqrt{t^2+6t+1}]:4t=\frac{1+t^2}{2t}+q(1-t). \end{aligned} \tag{5}$$

Därvid erhållas $\sin\varphi$ och $\cos\varphi$ numeriskt, och man får

$$\begin{aligned} \alpha &= [b\sin\varphi - a(1-\cos\varphi)] : (\sin\varphi+\cos\varphi-1) \\ \beta &= [a\cos\varphi - b(1-\sin\varphi)] : (\sin\varphi+\cos\varphi-1) \end{aligned} \tag{6}$$

Geometriskt åskådligare är kanske uttrycket

$$\sin 2\varphi = \frac{4t}{(1+t)^2} = \frac{4ab}{(a+b)^2} \tag{7}$$

vilket kan användas för konstruktion av φ, varvid medeltalen $(a+b):2$ och $\sqrt{ab}$ spela rollen av bekanta led av proportionen. Man kan också konstatera, att φ bör bestämmas så, att styckena $u=a:\sin\varphi$ och $v=b:\cos\varphi$ uppfylla villkoret

$$\sqrt{uv} = \frac{a+b}{2}\cdot\sqrt{2}$$

dvs. så, att kvadratroten ur produkten blir lika med diagonalen i en kvadrat med medeltalet av axlarna som sida. I fig. 2 ser man,

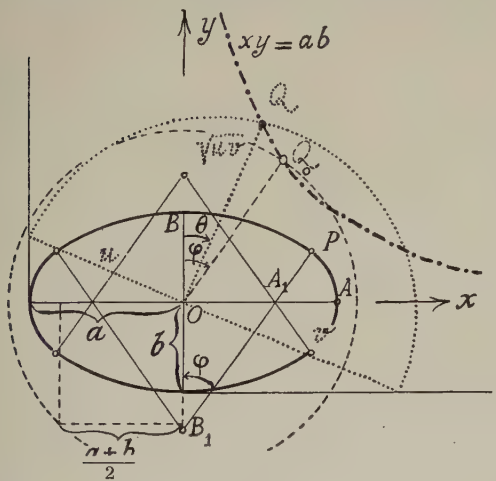


Fig. 2. En konstruktion av φ. Kvasiellipsen svarar mot fallet $a=5$, $b=3$. Den streckpunkterade kurvan är hyperbeln $xy=ab$, som är orten för ändpunkterna av $OQ=\sqrt{uv}$, när $u=a:\sin\theta$ och $v=b:\cos\theta$ och vinkeln $BOQ=\theta$. Punkten Q_0 är skärningen mellan hyperbeln och den streckade cirkeln. Då övergår θ till det sökta värdet φ.

hur denna konstruktion av vinkeln φ kan illustreras. För varierande φ bilda fotpunkterna av $\sqrt{uv}$ en liksidig hyperbel $xy=ab$, som skär 45°-linjen på avståndet $\sqrt{2ab}$ från origo.

Sedan φ konstruerats, får man lättast α och β ur ett par rätvinkliga trianglar, som innehålla a och b, i det att man har $a:b=\operatorname{tg}\varphi$, $\beta:a=\cot\varphi$.

Det kan observeras, att kvasiellipsen för de flesta praktiska ändamål ej kan skiljas från ellipsen. Även förnämligare kvasiellipser skulle ju kunna konstrueras, med flera cirklar — romben, som bildas av radierna till bågarnas ändpunkter, övergår till en sym-

metriskt belägen flerhörning, som är en bruten approximation av astroiden — men det räcker säkert för de flesta ändamål att använda kvasiellipsen, som dock har 8 punkter gemensamma med ellipsen. Sämst bör tillnärmelsen vara mellan ett par av dessa 8 punkter, men erfarenheten visar snart, att det rör sig om praktiskt betydelselösa differenser.

Planetbanorna äro som bekant ellipser med ganska liten excentricitet. Den mest excentriska banan, bortsett från Plutos, är Merkuriusbanan med en excentricitet av $e=0{,}2056$. Under det att fokus ligger excentriskt med mer än 20 %, är banans *form* föga skild från cirkelbanan: sätter man $b:a=t=1-h$, är h endast av storleken $e^2:2=2{,}1$ %. Den motsvarande kvasiellipsen har i första graden $1-\alpha:\alpha=\beta:b-1=h\cdot(2+\sqrt{2}):2$, varför romben är en liten kvadrat med diagonalen $3{,}414\cdot h$. Man har $\operatorname{tg}\varphi=1-hq=1-h:\sqrt{2}$, således φ nära 45°. Låter man planeterna röra sig som leksakståg med 4 växlar och 4 olika hastigheter på de 4 cirkelbågarna, får man ett litet händigt planetarium. Men kvasiellipserna äro tydligt excentriskt placerade.

I ett gammalt spanskt lexikon har jag funnit en bågkonstruktion, som tydligen en gång var på modet bland arkitekterna i Spanien. Den kallas *el arco zarpanel*, och man skulle vara frestad att kalla kvasiellipsen för »zarpanellen» i stället för att använda det valda namnet. Ordet zarpanel förefaller ganska mystiskt. En närmare undersökning visar, att det också har de gamla formerna *carpanel* och *escarpanel*, och att det sistnämnda ordet var en förvrängning av det franska *anse de panier*, som en gång var termen för kurvor, bestående av cirkelbågar och avseende att ersätta ellipsen i den praktiska konstruktionen av valvbågar. Den vanliga zarpanellen ritades så, att man delade storaxeln i 3 lika delar, slog upp liksidiga trianglar åt båda hållen på mittbitarna och ritade sextiograderssektorer med $\alpha=\frac{2}{3}\cdot a$ och $\beta=\frac{1}{3}\cdot a$. Man fick sålunda för den approximerade ellipsens lillaxel

$$b=\tfrac{4}{3}\cdot a-\tfrac{2}{3}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\text{eller}\quad t=b/a=0{,}756.$$

Den *riktiga* kvasiellipsen för denna ellips har icke 30° vinkel, utan man får $\varphi=39°21'40''$ och radierna

$$\alpha=0{,}62\,a,\quad \beta=1{,}22\,a.$$

De gamla arkitekternas zarpanel var alltså en dålig kvasiellips, ehuru den säkert var god nog för ett otränat öga.

Interferensförsök med mikrovågor

Av assistent Bengt Liljeqvist, Stockholm

I gymnasiekursen på reallinjen ingår ett rätt omfattande kapitel om ljuset som vågrörelse, där ett flertal interferensfenomen beskrives — böjning i en eller flera spalter, Newtons ringar m. m. Försöken är dock i de flesta fall svåra att utföra inför en klass, då interferensbilderna oftast är så ljussvaga att de blott kan iakttas på nära håll. På grund av att ljuset har så kort våglängd ställs dessutom stora krav på godheten hos spalter och planheten hos reflekterande ytor, och injusteringssvårigheterna blir i många fall stora.

Om våglängden kunde väljas av storleksordningen 10 cm, skulle man komma ifrån dessa svårigheter. Man har därför försökt att använda ljudvågor i stället för ljus (se t. ex. Knave och Lindholm: Några ljudförsök med centimetervågor. Elementa 33 (1950): 4, sid. 233). Vid försök med ljud har man emellertid en hel del besvär med reflexioner från rummets väggar. Dessutom är ljud en vågrörelse av annat slag än ljus. Man kan t. ex. inte polarisera ljudvågor.

Man kan emellertid använda elektromagnetiska vågor med ca 10 cm våglängd och därmed utföra de flesta vanliga försöken på interferens och polarisation. Dessa vågor reflekteras inte i störande grad av rummets väggar och är mycket bekväma att arbeta med. Som speglar använder man plåtbitar av järn eller annan metall. Samma plåtar kan paras ihop och bilda spalter. På planheten behöver man inte ställa stora krav; om avvikelsen från den plana ytan ingenstädes överstiger någon centimeter, kan man vara fullt nöjd!

Som »ljuskälla» använder man en mikrovågsändare, som i huvudsak är uppbyggd av några mässingsrör och en Lighthousetriod, fig. 1. Mottagaren består av några mässingsrör och en kristall, fig. 2. Sändaren moduleras med tonfrekvens, vilket kan ske genom att man använder 50-periodig växelspänning till anodspänning på trioden, eller genom att man påför triodgallret en växelspänning från en tongenerator. I mottagaren likriktas den modulerade högfrekvensen. En ansluten tvårörsförstärkare ger en ton i en högtalare. Om man modulerar med en frekvens på några tusen perioder i sekunden, där örats känslighet är som störst, kan man komma upp till avstånd mellan sändare och mottagare på omkring 10 meter.

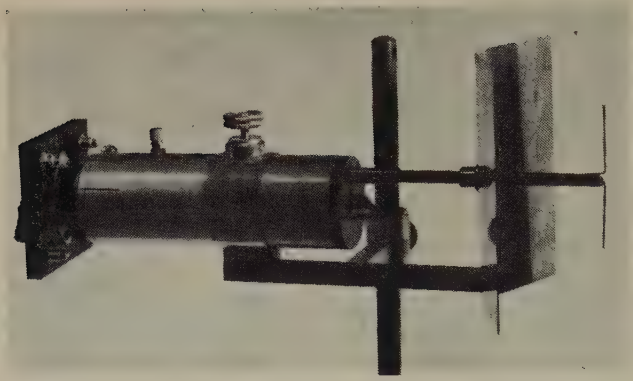


Fig. 1. Sändare.

Sändarantennen synes längst till höger på fig. 1. Bakom antennen synes en liten plåtskärm, som gör att mikrovågorna huvudsakligen kommer att gå ut inom en begränsad vinkel. Det kan emellertid i vissa försök vara lämpligt att med en plåt skärma av den direkta strålningen från sändaren till mottagaren.

Den som önskar bygga en sändare och en mottagare får jag hänvisa till någon bok om mikrovågsteknik. Jag vill emellertid påpeka, att arbetet är precisionsbetonat och fordrar tillgång till bl. a. en god svarv. (Apparaterna kommer även att kunna erhållas färdigbyggda från Norstedts skolmaterielavdelning.)

Säkert kommer den invändningen att resas, att en mikrovågsändare är en alltför invecklad tingest för att man skall kunna framföra den inför en gymnasieklass. Ja, givetvis, om man skulle ge sig på att försöka förklara hur den fungerar. Men hoppa över det; kalla den blott för »ljuskälla» och mottagaren för »öga»! Är det inte bra mycket märkligare förresten, att ett tänt stearinljus sänder ut en elektromagnetisk våg (ljusvåg)! Hur förklarar man det? Och ändå användes stearinljus och glödlampor utan betänkligheter vid undervisningen i realskolan!

Till försöken erfordras:

1. Sändare, som drives med 6 V glödström och 220 V växelström till anoden. Eventuellt en tongenerator för gallermodulation, i vilket fall man lägger 220 V likspänning på anoden. (Spänningarna anges blott för att orientera läsaren om behovet av strömkällor; olika sändarkonstruktioner kunna naturligtvis fordra något varierande värden.)

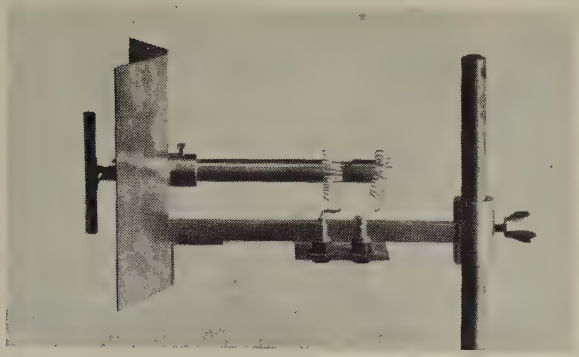


Fig. 2. Mottagare.

2. Mottagare: Lågfrekvensförstärkare av enkelt slag; förstärkarrör plus slutrör räcker. Högtalare.
3. Plåtskivor 50×50, 50×50, 50×20 (längsta sidan lodrät) och 40×40 cm² (måtten mycket ungefärliga). Skiva av ebonit e. d. 50×60 cm² (längsta sidan vågrät).

Sändare och mottagare och skärmar förses lämpligen med hylsor med skruv för fastsättning på vanliga stativ (synes tydligt på fig. 2).

Som exempel på försök man kan göra med apparaturen kan nämnas:

Ljusets böjning i en spalt. Med de båda största metallskärmarna bildas en ca 20 cm bred spalt. Ljuskällan (=sändaren) uppställes någon meter från spalten och ögat (=mottagaren) uppsöker interferensmaxima någon meter bakom skärmen i olika riktningar. Spaltbredden varieras, och man undersöker, hur interferenserna förändras.

Ljusets böjning i två spalter. Med de två stora skivorna på båda sidor om den smala skivan åstadkommer man två spalter. Bredd på vardera spalten ca 10 cm. I övrigt som föregående försök. (Den fjärde skivan användes lämpligen för att hindra strålar att gå direkt till ögat, då man uppsöker maxima, som ligger långt åt sidan.)

Fresnels spegelförsök. De två stora plåtskivorna uppställes bredvid varandra och så att de bildar ca 170° vinkel med varandra. Ljuskällan uppställes någon meter snett framför speglarna. Framför speglarna får man interferenser, som om ljuset kommit från de båda spegelbilderna.

Lloyds spegelförsök. En spegel uppställes någon meter framför ljuskällan, så att man får en bild av denna på några decimeters avstånd från ljuskällan. Man får interferenser mellan direkta och speglade strålar.

Interferenser i tunt skikt. Interferenser av det slag man får då strålar reflekteras dels mot främre och dels mot bakre ytan i ett tunt skikt (Newtons ringar, såpbubblor) kan man lätt demonstrera. Man låter mikrovågorna reflekteras mot ebonitskivan och en plåtskiva, parallell med ebonitskivan och bakom denna. Ebonitskivan reflekterar en del och släpper igenom en del av det infallande »ljuset». Då avståndet mellan skivorna varieras, varierar det totalt reflekterade ljuset periodiskt.

Michelsons interferometer. Uppställningen framgår av fig. 3. Ljuset från sändaren *Lj* träffar ebonitskivan *E*, där en del reflekteras mot spegeln S_1 tillbaka genom *E* till mottagaren *Ö*. En del av ljuset går från *Lj* genom *E* till S_2 och reflekteras sedan mot *E* till *Ö*. Skärmen S_3 hindrar ljus att gå direkt från *Lj* till *Ö*. Om S_1 (eller S_2) närmas eller avlägsnas *E*, får man periodiska ändringar i den mottagna ljusstyrkan. Försöket kan, liksom det förra, direkt användas för uppmätning av ljusets våglängd.

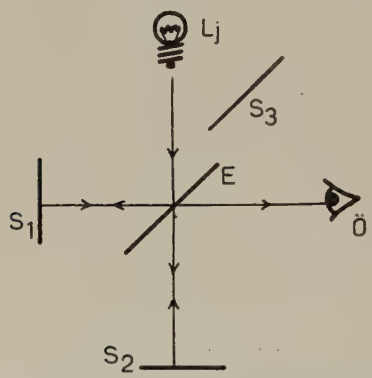


Fig. 3. Michelsons interferometer.

Man kan även göra en del försök med polariserat ljus. Den från sändaren utgående vågen är nämligen polariserad så, att den elektriska fältvektorn är lodrät (parallell med sändarantennen). Detta märker man lätt, om man vrider mottagaren, så att dess antenn kommer vågrätt. Ljudet i högtalaren upphör då.

Samtliga försök är ytterst lätta att utföra och fordrar inga förberedelser. Sändaren är ungefär lika driftsäker som en vanlig radioapparat, och skärmarna kan man ställa upp efter ögonmått utan några noggranna injusteringar.

Litteratur

Bronwell and Beam: Principles and Applications of Microwaves.
Hamilton, Knipp and Kuper: Klystrons and Microwave Triodes.
Andrews: Microwave Optics, Am. J. Physics 14, 379 (1946).

Om uppdelning i stambråk

Av hemmansägare John Hagström, Sollefteå

Sir James Jeans skriver i sin bok »Hur fysiken utvecklats» (Natur och Kultur, 1949) om egypternas matematik följande (sid. 18): »Vår kännedom om egypternas aritmetiska metoder härrör huvudsakligen från »Papyrus Rind», som förvaras i British Museum. Denna papyrus är från 1650 f. Kr., men den utgör endast en avskrift av en tidigare papyrus, vilken tydligen skrivits många århundraden tidigare. Kopisten är en präst vid namn Ahmes. Papyrus Rind innehåller upplösningen av ett stort antal allmänna bråk i stambråk. Utgångsbråket har alltid täljaren 2. Där förekommer t. ex.

$$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}.$$

Man spanar förgäves efter regler för utförande av dylika operationer. Det hela synes mera vara ett kompendium över resultatet av ett antal experiment.»

Detta uttalande av Jeans väckte mitt intresse och gav mig anledning att söka efter regler för dylika räkningar, och jag fann därvid att ovanstående exempel kan återföras på en allmän metod för uppdelning i stambråk.

Om stambråkens antal är 3, gäller formeln:

$$\frac{2}{2n^2-1} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(2n^2-1)} + \frac{1}{(n+1)(2n^2-1)} \qquad (1)$$

där $n=7$ ger det citerade exemplet. Då Papyrus Rind endast ger uppdelning av bråk med nämnaren under 100, ger ovanstående princip uppdelningar för nämnarna 7, 17, 31, 49, 71 och 97.

I de fall då nämnaren är en produkt av två olika udda tal, m och n, kan en uppdelning ske efter följande metod:

$$\frac{2}{mn} = \frac{1}{m \cdot \frac{m+n}{2}} + \frac{1}{n \cdot \frac{m+n}{2}} \qquad (2)$$

t. ex.

$$\frac{2}{55} = \frac{2}{5 \cdot 11} = \frac{1}{40} + \frac{1}{88}$$

Slutligen kan man tänkas använda formeln

$$\frac{2}{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(2n-1)} \qquad (3)$$

vilken gäller för alla udda tal, och några andra kan väl inte komma ifråga. Den sista metoden lider emellertid av det felet, att ena stambråkets nämnare blir mycket stor.

Tillägg till ovanstående.

Formeln (1) härovan är ett specialfall av följande metod. Sättes

$$\frac{2}{m} = \frac{1}{kab} + \frac{1}{kam} + \frac{1}{kbm} \qquad (4)$$

erhålles $\frac{2}{m} = \frac{m+a+b}{kabm}$ $\quad \because\ m = 2kab - a - b$

$$2km + 1 = (2ka - 1)(2kb - 1)$$

Man kan alltid välja $k=1$. Men om $2m+1$ är ett primtal, kan det stundom vara bättre att välja ett större k-värde. För $k=1$, $a=n$, $b=n+1$ får man

$$2m + 1 = (2n - 1)(2n + 1) \quad \because\ m = 2n^2 - 1$$

och man återkommer till (1).

Ex. 1. $m=13$. För $k=1$ erhålles $2m+1 = 3 \cdot 9$, $a=2$, $b=5$,

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{10} + \frac{1}{26} + \frac{1}{65}$$

För $k=4$ erhålles $2km+1 = 7 \cdot 15$, $a=1$, $b=2$,

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$$

Jämte (2) kan man även använda formeln

$$\frac{2}{mn} = \frac{1}{rm} + \frac{1}{rmn} = \frac{n+1}{rmn} \qquad (5)$$

$$r = \frac{1}{2}(n+1) \qquad (6)$$

Om n är betydligt mindre än m, ger denna formel bättre resultat än (2). Äro m och n tämligen lika stora, är formeln (2) att föredraga. För $m=1$, övergå både (2) och (5) med användning av (6) till (3).

Ex. 2. $mn=99$. Väljes $m=33$, $n=3$, ger (5) uppdelningen hos Ahmes

$$\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$$

Väljes $m=9$, $n=11$, ger (2)

$$\frac{2}{99} = \frac{1}{90} + \frac{1}{110}$$

Agne Wahlgren

Osmotiskt tryck och osmotiskt värde

Av docent Sven Algéus, Lund

Få skolämnen torde under de senare åren ha undergått så genomgripande förändringar som kemien. Undan för undan har äldre stoff utmönstrats ur läroböckerna och ersatts av nytt. Likaledes ha äldre begrepp och definitioner ersatts av nya och mera generella. Oxidationsbegreppet och den moderna valensläran utgöra exempel härpå. Ett kapitel synes dock, alla moderniseringar till trots, ha lämnats orört i läroböckerna i kemi för våra gymnasier, nämligen kapitlet om lösningars osmotiska tryck. Detta torde kanske sammanhänga därmed, att även åtskilliga större läroböcker avsedda för universitet och högskolor fortfarande vidhålla det gamla föreställningssättet om det osmotiska trycket som ett slags gastryck utövat av det lösta ämnets molekyler. I föreliggande uppsats avser förf. att göra en kritisk granskning av detta äldre föreställningssätt om det osmotiska tryckets mekanism för att därpå söka ge en för elementära stadier mera lättbegriplig framställning av de osmotiska fenomenen, vilken samtidigt står i bättre överensstämmelse med de moderna fysikalisk-kemiska teorierna för lösningar.

1. van't Hoffs lag för det osmotiska trycket

Det osmotiska trycket studerades kvantitativt första gången 1877 av den tyske växtfysiologen Pfeffer (18). Denne använde sig av en osmometer, i sin enklaste form bestående av en med stigrör försedd porös lercylinder i vilkens porer utfällts en semipermeabel membran av kopparcyanoferrat(II). Innermediet utgjordes av en rörsockerlösning, yttermediet av destillerat vatten. Innerlösningen visar sig därvid som bekant besitta en sugverkan, som åstadkommer ett inflöde av vatten i osmometerns innerkärl. Vätskepelaren i stigröret stiger, tills *det uppkomna hydrostatiska trycket, lösningens osmotiska tryck*, är lika med den kraft per ytenhet, som orsakar vattnets inflöde och kan följaktligen, sedan jämvikt inträtt, användas som ett mått på denna. Pfeffer observerade i sina försök, att det osmotiska trycket var proportionellt mot lösningens koncentration och att det ökades med temperaturen. Han drog

dock aldrig helt ut de fysikalisk-kemiska konsekvenserna av sin upptäckt. Det var den holländske fysikern och kemisten van't Hoff (8), som 1887 härledde lagen för det osmotiska trycket. Denna kan i korthet formuleras på följande sätt: en lösnings osmotiska tryck är direkt proportionellt mot lösningens koncentration och mot lösningens absoluta temperatur. Eller i formel:

$$p = RCT \qquad (1)$$

där p=osmotiska (hydrostatiska) trycket i atmosfärer, R en konstant, C koncentrationen och T absoluta temperaturen. Uttryckes koncentrationen i moler per liter lösning, kan C sättas=n/v, där n betyder antalet moler på volymen v liter. Uttrycket kan då transformeras till

$$pv = nRT \qquad (2)$$

vilken formel överensstämmer med gasernas tillståndslag. Med de ovannämnda enheterna får R ett värde, som inom ett visst koncentrationsområde avviker från gaskonstanten med endast ca 1 %. Liksom gaslagarna gälla endast för gaser, som befinna sig långt från kondensationspunkten, gäller den osmotiska lagen endast för utspädda lösningar. Osmotiska trycket blir vidare oberoende av det lösta ämnets kemiska natur — vi bortse i detta sammanhang från elektrolyter.

Giltigheten av den osmotiska lagen har sedermera bekräftats av Morse och Frazer (16, 17) samt av Berkeley och Hartley (1). De senare använde sig av en förbättrad osmometer i vilken det dessutom var möjligt att lägga ett övertryck på lösningen och därigenom hindra vatteninflödet. Redan Pfeffer (18) hade i sina kvantitativa försök använt sig av mottrycksprincipen. Härigenom vinnes, att lösningens koncentration hålles konstant under försökets gång samtidigt som man kan erhålla mycket noggranna värden. Med utgångspunkt från denna försöksteknik kunna vi definiera det osmotiska trycket som det övertryck, som måste läggas på en lösning i en osmometer för att nätt och jämnt hindra det rena lösningsmedlet från att tränga genom osmometerns semipermeabla membran. Detta torde i själva verket vara den bästa definitionen på osmotiskt tryck (Glasstone 7).

Vid högre koncentrationer — över 0,2 moler per liter — är som nämnts överensstämmelsen mellan de enligt van't Hoffs lag beräknade och de experimentellt funna värdena mindre god. Morse och Frazer (16, 17) observerade, att om lösningens koncentration uttrycktes i moler per 1000 g lösningsmedel (molalitet) istället för i moler per liter (molaritet), proportionalitetsfaktorn förblev

konstant inom ett något större område. Redan i 1-molala lösningar äro emellertid även här skillnaderna mellan experimentellt funna och beräknade värden avsevärda.

2. Osmotiska tryckets mekanism enligt van't Hoff

Osmotiska trycket har ovan definierats såsom det maximala hydrostatiska tryck, som uppkommer, när en lösning är skild från lösningsmedlet genom en semipermeabel membran eller såsom det övertryck, som måste läggas på en lösning för att precis förhindra rena lösningsmedlet att passera den semipermeabla membranen. Termen användes emellertid lika ofta för att beteckna det hydrostatiska tryckets ekvivalent. Någon skarp distinktion i terminologi förekommer vanligen ej. Ursprungligen torde man med osmotiskt tryck i själva verket ha avsett det hydrostatiska tryckets ekvivalent. Därmed kommer man emellertid också osökt in på det osmotiska tryckets mekanism.

Giltigheten av gasernas tillståndslag vid beräkning av det osmotiska trycket i utspädda lösningar berättigar till följande uttalande: Det osmotiska trycket hos en utspädd lösning är lika stort som det tryck det lösta ämnets molekyler skulle utöva, om dessa befunne sig i gasform i samma volym och vid samma temperatur som lösningens (van't Hoff 8). Denna sats, vars riktighet man svårligen kan bestrida, uttyddes emellertid dithän, att det lösta ämnets molekyler skulle befinna sig i ett slags gastillstånd. Liksom gasmolekylerna genom sina stötar utöva ett tryck på väggarna av det kärl i vilket de befinna sig, skulle det lösta ämnets molekyler utöva ett liknande tryck på behållarens väggar, och detta tryck skulle vara identiskt med lösningens osmotiska tryck. *Stötarna av lösningsmedlets molekyler synes däremot stillatigande kunna försummas!* Det framgår av van't Hoffs lag, att trycket måste antaga stora värden redan i måttligt koncentrerade lösningar. I en 1-m rörsockerlösning borde det sålunda uppgå till icke mindre än 22,4 atm. vid 0° C. Liksom molekylerna i en gas sträva att förstora gasens volym, skulle vidare det lösta ämnets molekyler sträva att förstora lösningens volym. Detta vore emellertid endast möjligt under specifika omständigheter, t. ex. i en osmometer, där lösningen genom upptagning av vatten har denna resurs. Denna uppfattning av det osmotiska tryckets mekanism synes så småningom ha blivit allmänt antagen och har hållit sig kvar i mer eller mindre tillspetsad form in i våra dagar. Endast långsamt synes den få ge vika för andra föreställningssätt. Likväl är den behäftad med så påtagliga svagheter, att det är svårt att förstå, hur den så allmänt kunnat accepteras.

3. Några kritiska synpunkter

Om man godtar ovanstående tolkning av det osmotiska tryckets mekanism, måste man också tillfredsställande kunna besvara följande spörsmål: På vilka grunder kan man helt bortse från lösningsmedlets existens? Har inte också lösningsmedlets molekyler en rörelse, och bombardera icke också dessa molekyler väggarna av bägaren i vilken lösningen befinner sig? Vilket är för övrigt lösningsmedel och löst ämne i en blandning av t. ex. lika volymer metylalkohol och vatten? Beteckningen lösningsmedel är rent villkorlig och användes oftast om den komponent, som befinner sig i överskott.

I ett osmometerförsök med metylalkohol + vatten som innermedium, vatten som yttermedium samt oxblåsa som membran (genomsläppligt för H_2O men ej för CH_3OH i kortvariga försök) kan man påvisa, att *alkoholen har ett osmotiskt tryck* (Brauner 3), dvs. det uppkommer ett hydrostatiskt tryck, vilket skulle bero på alkoholmolekylernas kinetiska tryck. Med samma innerlösning men med metylalkohol som yttermedium och specialbehandlat kollodiummembran (genomsläppligt för CH_3OH men ej H_2O i kortvariga försök) kan man påvisa, att *vattnet har ett osmotiskt tryck*, men här skulle orsaken vara vattenmolekylernas kinetiska tryck. Vilka molekyler bombardera i ett sådant fall väggarna i en öppen bägare innehållande nämnda metylalkohollösning? Svaret måste väl vara: båda slagen. Men hur stort är då lösningens osmotiska tryck?

En annan fråga, som länge vållat bekymmer, är följande: Hur är det möjligt, att ett mycket tunnväggigt glaskärl förmår uthärda tiotals, ja hundratals atmosfärers tryck, när detta levereras i form av ett osmotiskt tryck (uppfattat som ett molekylbombardemang av det lösta ämnets molekyler), men endast någon atmosfärs övertryck, när det har formen av ett gastryck från t. ex. en bomb?

I allmänhet beröres icke detta spörsmål. Den nya upplagan av Holleman-Wibergs lärobok i kemi (10) söker dock besvara detsamma. Ett citat säger mera än en omskrivande översättning: »Löst man z. B. Zucker in Wasser auf, so verteilt es sich darin molekular. Die Zuckermoleküle schwirren in der Lösung wie die Moleküle eines Gases regellos umher, so dass sich der gelöste Stoff wie ein gasförmiger Stoff verhält. Zwar üben die Moleküle des flüssigen und daher spezifisch dichten Lösungsmittels starke Anziehungskräfte auf die gelösten Molekülen aus. Innerhalb der Lösung heben sich diese aber gegenseitig auf, da sie hier (här följer hänvisning till schematiska figurer liknande figur 1, G) von allen Seiten her gleichmässig wirken. Nur an der

Aussenfläche der Flüssigkeit, an der die Anziehung einseitig nach dem Innern zu erfolgen muss, wirken sich die Kräfte aus (här fig. 1, F). Daher kommt es, dass die in einer Lösung gelösten Moleküle keinen dem Gasdruck entsprechenden Druck auf die Wände des einschliessenden Gefässes auszuüben vermögen. Dies ist erst dann der Fall, wenn das die Lösung enthaltende Gefäss von Lösungsmittel umgeben ist und die Wände des Gefässes halbdurchlässig (»*semipermeabel*»), d.h. durchlässig für das Lösungsmittel und undurchlässig für den gelösten Stoff sind. Denn nur dann wirken — wie in Fig. 30 (här figur 1, H) an einem gelösten Teilchen gezeigt ist — auch an der Wandgrenzfläche die Anziehungskräfte wie im Innern der Lösung gleichmässig von allen Seiten her auf die gelösten Moleküle, so dass diese — in summa der Anziehung entzogen — wie Gasmoleküle gegen die für sie undurchlässige Wand anprallen und damit einen Druck auf diese ausüben.»

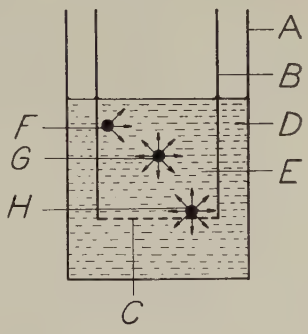


Fig. 1. Osmometer. A ytterkärlets, B innerkärlets glasvägg, C semipermeabel membran, D och E lösningsmedel i ytter- och innerkärl (streckade partier). F, G och H representera det lösta ämnets molekyler i olika lägen. Pilarna ange lösningsmedlets attraktion på det lösta ämnets molekyler. Man kan enligt detta schema förklara, varför glasväggen vid F motstår trycket men icke varför den oftast mycket bräckligare semipermeabla membranen vid H gör det. Osmotiska trycket anses enligt denna uppfattning existera redan innan lösningen stigit i innerkärlet! Jämför texten.

Sedan osmometerns väggar (fig. 1, B) genom ovanstående överläggning räddats undan det fördärvbringande molekylbombardemanget (osmotiska trycket), återstår emellertid att förklara, hur den ännu bräckligare semipermeabla membranen (figur 1, C) förmår uthärda detsamma i hela dess styrka. I figur 1 har H fått representera de från alla håll likformigt påverkade sockermolekylerna, vilka sålunda i 1-molar lösning bombardera den ofta mycket tunna membranen med minst 22,4 atmosfärers tryck. Det är särskilt anmärkningsvärt, att detta sker redan innan vattnet börjat stiga i osmometern! Den som gjort osmotiska försök, får stundom uppleva, att membranen på ett senare stadium i försöket

brister, nämligen då vattnet stigit till ett par meters höjd i stigröret. Det hydrostatiska trycket uppgår då till 0,2 à 0,3 atmosfärer. En eventuell förklaring, att osmotiska trycket (sockermolekylernas bombardemang) och hydrostatiska trycket adderas, är icke användbar, då det är likgiltigt, om lösningen från början är 1-, 2- eller 3-molar osv. Den givna förklaringen till varför våra ordinära laboratoriekärl icke brista under inverkan av lösningarnas osmotiska tryck är icke tillfredsställande.

4. van't Hoffs lag och den termodynamiskt härledda lagen för osmotiska trycket

Det enda verkligt vägande skälet att tolka osmotiska tryckets mekanism som ett molekylbombardemang, utövat av det lösta ämnets molekyler är det faktum, att gasernas tillståndslag kan användas vid beräkningen av detsamma. Den omständigheten att van't Hoffs lag gäller endast för utspädda lösningar, synes snarare vara en styrka än en svaghet, då gaslagarna ju likaledes gälla endast för »utspädda» gaser. Hur kan det då komma sig, att gasernas tillståndslag kan användas vid beräkningen?

De kvantitativa lagar för lösningar, som deducerats termodynamiskt, dvs. på basis av energiutbyte och icke på basis av osmos, ge svaret på den frågan. För den fullständiga termodynamiska härledningen av formeln för det osmotiska tryckets storlek hänvisas till originalarbeten (ex. van Laar 11) eller läroböckerna i fysikalisk kemi (ex. Bladergroen 2, Glasstone 7, Lewis och Randall 12, Taylor 20). Här skall endast erinras om de förutsättningar beviset bygger på samt visas, hur det erhållna uttrycket kan approximeras till van't Hoffs lag. Under förutsättning att lösningen är ideal, dvs. 1) att lösningens båda komponenter kunna blandas utan ändring i totalvolym, 2) att blandningen kan ske utan värmeeffekt och kemisk reaktion samt 3) att lösningsmedlets ånga följer lagarna för en ideal gas, gäller följande uttryck:

$$-p = \Pi = -\frac{RT}{V_0} \ln x_1 \qquad (3)$$

p är osmotiska trycket, definierat som det övertryck, som måste läggas på en lösning för att precis hindra inflödet av rena lösningsmedlet.

Π är lösningens mottryck, numeriskt lika med p men av motsatt riktning. Även Π betecknas ofta som lösningens osmotiska tryck. Både p och Π äro hydrostatiska tryck.

R är gaskonstanten, T absoluta temperaturen, V_0 lösningsmedlets molvolym och x_1 lösningsmedlets molbråk.

Om lösningen består av n_1 moler lösningsmedel och n_2 moler löst ämne, så är lösningsmedlets och det lösta ämnets molbråk resp.

$$x_1 = n_1 : (n_1 + n_2) \text{ och } x_2 = n_2 : (n_1 + n_2)$$

Dessutom är $x_1 + x_2 = 1$.

Ekv. (3) kan utvecklas på följande sätt:

$$\Pi = \frac{RT}{V_0}\left(-\ln x_1\right) = \frac{RT}{V_0} - \ln\left(1 - x_2\right) =$$

$$= \frac{RT}{V_0}\left(x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{3}\cdot x_2^3 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{RT}{V_0}\left[\left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right)^2 + \ldots\right] \qquad (4)$$

Denna formel har visat sig gälla med stor noggrannhet för blandningar av kolväten och derivat av kolväten, t. ex. etylendibromid+propylendibromid (se ex. Taylor 20), vilka komma ideala lösningar mycket nära. Större avvikelser visa, såsom är att vänta, rörsockerlösningar beroende på att de icke helt uppfylla de uppställda kraven på en ideal lösning.

Formel (4) kan för utspädda lösningar, där n_2 är litet i jämförelse med n_1, lätt approximeras. Bråket $n_2 : (n_1 + n_2)$ är då ett litet tal, varför kvadraten och högre potenser kunna försummas. Vidare kan n_2 försummas bredvid n_1, varvid uttrycket övergår till

$$\Pi = \frac{RT n_2}{V_0 n_1} \qquad (5)$$

där $V_0 n_1$ är lösningsmedlets volym i en lösning innehållande n_2 moler löst ämne. Formel (5) kan betraktas som Morses modifikation av van't Hoffs lag. I ännu mera utspädda lösningar är lösningsmedlets volym praktiskt taget lika med lösningens, varför $n_1 V_0$ kan sättas $= V$, där V är lösningens volym. Koncentrationen är då uttryckt i molaritet, och uttrycket får formen

$$\Pi = \frac{RT n_2}{V} \qquad (6)$$

som är van't Hoffs lag för det osmotiska trycket.

Med gaslagen har den termodynamiskt härledda formeln (3) en viss likhet. Att av denna likhet sluta, att det osmotiska trycket orsakas av det lösta ämnets molekylbombardemang på samma sätt som gastrycket orsakas av gasmolekylernas stötar mot behållarens väggar, är naturligtvis icke tillåtet.

5. Det osmotiska tryckets mekanism enligt Tinker

Vilken uppfattning ger oss då den termodynamiskt härledda lagen om osmotiska tryckets mekanism? Svaret blir: egentligen ingen alls! Orsaken till osmotiska tryckets uppkomst är en skillnad i den partiella molala fria energin hos det rena lösningsmedlet och hos lösningsmedlet i lösningen. Dessutom fordras, att lösningsmedel och lösning äro skilda åt av en semipermeabel membran, som släpper igenom lösningsmedlet men ej det lösta ämnet. *En lösning har sålunda i och för sig icke något osmotiskt tryck. En sak värd att betona är följande: det är lösningsmedlet, ej det lösta ämnet, som ger upphov till osmotiska tryck.* Molbråket för lösningsmedlet (x_1) ingår också i lagen för osmotiska trycket. Molbråket för det lösta ämnet (x_2) införes i andra hand.

Ehuru det icke är nödvändigt att vid behandlingen av det osmotiska trycket ha någon föreställning om mekanismen, är det som nedan skall visas ofta praktiskt att hålla sig med en dylik. Av de många försök, som gjorts för att finna en ersättning för den gamla van't Hoffska uppfattningen, måste Tinkers (21, 22) betecknas som det mest framgångsrika (se även Glasstone 7, Lewis 13). I anslutning till Dietericis ekvation för komprimerade gaser antar Tinker, att det på (den tänkta) ytenheten inuti en vätska (=rent lösningsmedel) existerar ett tryck π (liquid pressure) utövat av vätskans molekyler. Storheten låter sig emellertid icke direkt mätas, då varje införande av en yta åstadkommer diskontinuitet. De krafter, som verka i vätskans gränsyta, äro dels vätskemolekylernas kinetiska tryck π, dels den mot detta tryck riktade kohesionen, som i ytan gör sig ensidigt gällande. Mellan det i gränsytan rådande trycket P och det inre trycket π existerar följande samband (Dietericis ekv.):

$$P = \pi \cdot e^{-A/RT} \tag{7}$$

där A är det arbete, som en mol måste uträtta för att nå ytan (ett mått på kohesionen), R gaskonstanten, T absoluta temperaturen och e basen i naturliga logaritmsystemet. Då A är ett stort tal, måste följaktligen P vara litet jämfört med π; P representerar enligt Tinker även vätskans ångtryck.

Den fundamentala idén i Tinkers teori för osmotiska trycket är nu, att lösningsmedlets inre tryck (liquid pressure) i en lösning (π') är mindre än i rena lösningsmedlet. Följaktligen blir det i lösningens gränsyta observerade trycket samt lösningens ångtryck P' mindre än P, då

$$P' = \pi' \cdot e^{-A/RT}$$

Lägges nu ett övertryck på lösningen, ökar värdet på π' på grund av (den minimala) kompressionen. Därvid ökar såväl lösningens yttryck som ångtryck. När $\pi'=\pi$ och alltså $P'=P$, är övertrycket på lösningen=lösningens osmotiska tryck uppmätt i en osmometer. Experiment över ångtrycket bekräfta riktigheten av det sagda.

Äro nu t. ex. vatten och rörsockerlösning skilda åt genom en kopparcyanoferratmembran i en osmometer, uppträder i membranen ett ytfenomen: vatten adsorberas. Därvid är emellertid rena vattnets yttryck (P-värde) större än vattnets i lösningen. På grund härav sker en nettoinströmning av vatten i osmometern. Det därvid uppkomna hydrostatiska trycket ökar emellertid lösningens π'-värde, och när detta är=π, upphör inströmningen. Jämvikten bör naturligtvis betraktas som dynamisk. Att kopparcyanoferrat adsorberar mera H_2O ur rent vatten än ur en rörsockerlösning har experimentellt bekräftats av Tinker.

Enligt Tinker är orsaken till osmotiska tryckets uppkomst en skillnad i inre trycket (liquid pressure) hos rena lösningsmedlet och lösningsmedlet i lösningen. För uppkomsten av ett osmotiskt tryck fordras en semipermeabel membran (en osmometer). En lösning har sålunda icke heller enligt denna teori ett osmotiskt tryck i och för sig. Det är även här värt att betona, att det är lösningsmedlet och icke det lösta ämnet, som ger upphov till det osmotiska trycket. Mekanismen blir emellertid så att säga mera påtaglig enligt denna teori, än om man utgår ifrån differensen i lösningsmedlets partiella molala fria energi.

Det kan i förbigående nämnas, att Tinker deducerat en formel för beräkning av osmotiska trycket, vilket visat sig vara proportionellt mot $\frac{\pi - \pi'}{\pi'}$ (sålunda $ej=\pi-\pi'$). Det förtjänar dessutom att framhållas, att enligt Tinker bombardemanget i gränsytan av det lösta ämnets molekyler vanligen kan försummas (jfr även Ramberg 19).

6. Några pedagogiska synpunkter

Det är vid den elementära undervisningen, var den än bedrives, angeläget att i största möjliga mån bringa framställningen i överensstämmelse med vetenskapliga fakta på området. Ofta begränsas möjligheterna av att alltför stora insikter fordras i något hjälpämne, t. ex. matematik. I dylika fall måste emellertid undervisningen läggas så att de meddelade kunskaperna direkt kunna utbyggas av den, som önskar förkovra sig på området. Nedanstående synpunkter grunda sig huvudsakligen på de erfarenheter

förf. gjort vid undervisningen i växtfysiologi vid Lunds universitet under ett tiotal år. Då studenterna i stort sett fördela sig på två grupper omfattande sådana med resp. utan akademiskt betyg i kemi, måste den elementära undervisningen i stort sett rätta sig efter de senare. Härigenom erhålles emellertid också direkt anknytning till kemistudierna på gymnasiet.

Definition av osmotiskt tryck. I anslutning till ett osmometerförsök kan *osmotiska trycket definieras som det maximala hydrostatiska tryck, som uppkommer i en osmometer, där lösningen är skild från lösningsmedlet genom en perfekt semipermeabel membran.* Det sålunda uppmätta värdet hänför sig till den genom vattenupptagningen något utspädda lösningen. Har man möjlighet att förse den osmotiska cellen med kvicksilvermanometer och genom att ifylla Hg i den öppna skänkeln hålla lösningens volym konstant, definieras osmotiska trycket bäst som *det övertryck som måste läggas på en lösning för att precis hindra vatteninflödet genom den semipermeabla membranen* (Findley 6, Glasstone 7, Taylor 20). — Att kalla trycket av det lösta ämnets eller lösningsmedlets molekyler på membran eller väggar för osmotiskt tryck är felaktigt!

Kvantitativa lagar för osmotiska trycket. Att i anslutning till kvantitativa data anföra *van't Hoffs lag* för utspädda lösningar såsom i avsnitt 1 ovan torde vara både det mest vanliga och mest rekommendabla. Det bör emellertid betonas, att lagen trots sin likhet med gasernas tillståndslag icke har något med denna att göra utan *erhållits genom en för utspädda lösningar tillåten approximation av ett uttryck, som icke är en gaslag.* Härvid kan man även förklara, varför van't Hoffs lag gäller med större noggrannhet för mera koncentrerade lösningar, om koncentrationen uttryckes i molalitet i stället för molaritet.

Osmotiska tryckets mekanism. Här öppnar sig flera möjligheter. 1) Man kan avstå från att beröra denna del av ämnet. Eleverna lämnas emellertid då tillfälle att »förkovra sig» genom att »utöka» sitt vetande med den gamla van't Hoffska gastrycksteorin. Detta är minst av allt önskvärt, varför alternativ 1) f. n. måste förkastas.

2) *Man kan anknyta till koncentrationsbegreppet och diffusionen.* Vattenmolekylerna gå från den högre vattenkoncentrationen i osmometerns ytterkärl (destillerat vatten) till den lägre i dess innerkärl (sackaroslösningen) i överensstämmelse med lagarna för diffusionen. Sockermolekylerna kunna icke genomtränga den semipermeabla membranen och stanna därför i innerlösningen. Jämvikt inträder, när den på grund av det uppkomna hydrostatiska

trycket utpressade vattenmängden är lika med den mängd, som diffunderar in med anledning av koncentrationsskillnaden. Detta framställningssätt förekommer i äldre upplagor av Holleman (9) samt i snarlik form i amerikansk lärobokslitteratur i fysikalisk kemi och fysiologi (Meyer-Andersson 15, West 23, se även Ramberg 19).

3) En variant på samma tema finner man i en schweizisk lärobok i fysikalisk kemi (Bladergroen 2). I osmometern träffas den semipermeabla membranens insida såväl av vattenmolekyler som sockermolekyler, dess utsida däremot bara av vattenmolekyler. Sockermolekylerna kunna icke passera till skillnad från H_2O-molekylerna men belägga i varje ögonblick en viss yta. Per tidenhet träffas membranen därför av flera vattenmolekyler från utsidan än insidan och resultatet blir en nettoinströmning av vatten. Under inverkan av det uppkommande hydrostatiska trycket ökar antalet H_2O-stötar per tidsenhet på insidan och är vid jämvikt lika stort som på utsidan (jfr Tinkers π' och P', som ökar med trycket på lösningen). Det måste betonas, att de i detta sammanhang nämnda molekylstötarna *icke* få identifieras med osmotiska trycket!

Osmotiskt värde. De under 2) och 3) anförda schematiska framställningssätten ansluta sig ganska väl både till det termodynamiska betraktelsesättet och till Tinkers teori angående mekanismen. I båda fallen betonas sålunda lösningsmedlets betydelse för osmotiska tryckets uppkomst. Det följer vidare att en lösning i och för sig icke äger något osmotiskt tryck, ett faktum som med hänsyn till det äldre framställningssättet är värt att betona i undervisningen. För uppkomsten av ett dylikt fordras nämligen en osmometer av ett eller annat slag. *Däremot kan det av praktiska skäl vara lämpligt att tillskriva en lösning ett osmotiskt värde, varmed avses det osmotiska (hydrostatiska) tryck, den maximalt skulle utöva i en osmometer med lämplig semipermeabel membran och rena lösningsmedlet som yttermedium.*

7. De osmotiska storheternas användning

Att diffusionsprocesserna inklusive diffusionen genom membran spela en stor roll i de levande organismerna är ett välkänt faktum. Det är framför allt inom växt- och djurfysiologien samt medicinen som kunskaperna om osmos och osmotiskt tryck finna sin tillämpning. I de levande cellerna har man emellertid att taga hänsyn till icke blott osmotiskt värde och osmotiskt tryck utan även till cellernas turgortryck, väggtryck, sugkraft samt den s. k. vävnadsspänningen. Äro de grundläggande fysikalisk-kemiska defini-

tionerna oklara, kan man knappast vänta sig, att de teorier, som skola bygga vidare på dem, skola bli bättre.

Som en kuriositet kan nämnas, att en amerikansk fysiolog (Eyster 5) lagt sig den delikata uppgiften före att utreda definitionernas mångfald. I 105 representativa kemiska och fysiologiska arbeten fanns 6 definitioner på osmos. På osmotiskt tryck fanns i 110 arbeten 8 definitioner av vilka 8 använts av kemister, 7 av djurfysiologer, 7 av växtfysiologer samt 3 av övriga botanister.

Genom att acceptera van't Hoffs framställning av det osmotiska trycket som ett kinetiskt tryck utövat av det lösta ämnets molekyler har man på många håll råkat in i en återvändsgränd ur vilken det är svårt att finna ut.

Naturligtvis är det mest rationellt att bygga upp ett nytt system på termodynamikens grund. Så har, åtminstone för växtfysiologiens del, i själva verket också försökts (Broyer 4). Ett dylikt system har emellertid den nackdelen att bara vara tillgängligt för en förhållandevis liten skara specialister. På åtskilliga håll, särskilt i USA har man därför kompromissat och grundat beskrivningen av de osmotiska fenomenen på principer, som överensstämma med dem under avsnitt 6 ovan (Meyer 14). Genom att man lägger huvudvikten vid lösningsmedlets diffusion (eller koncentration) blir detta sätt att se på saken vetenskapligt mera tillfredsställande än det gamla. Pedagogiskt är det avgjort fördelaktigare. Därtill kommer, att det underlättar en övergång till ett strängt fysikaliskt-kemiskt betraktelsesätt för dem, som önska specialisera sig på området. Det synes förf. som om en beskrivning av det osmotiska tryckets mekanism enligt någon av de i avsnitt 6 givna versionerna skulle lämpa sig utmärkt även för våra svenska gymnasier.

Litteratur

1. Berkeley, Earl of and Hartley, E. G. J.: On the osmotic pressures of some concentrated aquous solutions. — Phil. trans. roy. soc. London A 206 (1906), 481.
2. Bladergroen, W.: Physikalische Chemie in Medizin und Biologie. — Basel 1945.
3. Brauner, L.: Das kleine pflanzenphysiologische Praktikum. II. Teil. Die physikalische Chemie der Pflanzenzellen. — Jena 1932.
4. Broyer, T. C.: The movement of materials into plants. Part 1. — Bot. Rew. 13 (1947), 1.
5. Eyster, H. C.: Osmosis and osmotic pressure. — Bot. Rew. 9 (1943), 311.
6. Findley, A.: Introduction to physical chemistry. — London 1946.
7. Glasstone, S.: Textbook of physical chemistry. — New York 1946.
8. Hoff, J. H. van't: Die Rolle des osmotischen Druckes in der Analogie zwischen Lösungen und Gasen. — Z. Phys. Chem. 1 (1887), 481.

9. Holleman, A. F.: Lehrbuch der anorganischen Chemie. — Berlin 1930.
10. Holleman, A. F. und Wiberg, E.: Anorganische Chemie. — Berlin 1945.
11. Laar, J. J. van: Über die genauen Formeln für den osmotischen Druck, für die Änderungen der Löslischkeit, für Gefrierpunkts- und Siedepunktsänderungen, und für die Lösungs- und Verdünnungswärmen bei in Lösung dissociierten Körpern. — Z. phys. Chem. 15 (1894), 457.
12. Lewis, G. N. and Randall, M.: Termodynamics. — New York 1923.
13. Lewis, W. C.: A system of physical chemistry. Vol. II. Thermodynamics. — London 1925.
14. Meyer, B. S.: The water relations of plant cells. — Bot. Rew. 4 (1938), 531.
15. Meyer, B. S. and Anderson, D. B.: Plant physiology. — New York 1947.
16. Morse, H. N.: The osmotic pressure of aqueous solutions. — Carnegie Inst. Wash., Publ. 198. 1914.
17. Morse, H. N. and Frazer, J. C. W.: The osmotic pressure and freezing-points of solutions of sane-sugar. — Am. Chem. J. 34 (1905), 1.
18. Pfeffer, W.: Osmotische Untersuchungen. — Leipzig 1877.
19. Ramberg, H.: Bemerkninger om det osmotiske trykks natur. — Fra Fysikkens Verden 9 (1947), 78.
20. Taylor, H. S. and Taylor, H. A.: Elementary physical chemistry. — London 1937.
21. Tinker, F.: The vapour pressures of binary liquid mixtures: Kinetic theory based on Dieterici's equation. — Phil. mag. 32 (1916), 295.
22. — Osmotic pressure: its relation to the membrane, the solvent, and the solute. — Phil. mag. 33 (1917), 428.
23. West, E. S.: Physical chemistry for students of biochemistry and medicine. — New York 1946.

Bokanmälningar

Helmut Hasse, *Höhere Algebra.* Bd I: Lineare Gleichungen, Bd II: Gleichungen höheren Grades. Dritte Auflage. Sammlung Göschen Nr 931, 932. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1951, 150+156 S., pr bd DM 2: 40.

Denna nya upplaga skiljer sig från den tidigare andra upplagan endast genom smärre korrektioner och förtydliganden.

De båda böckerna ge en kortfattad framställning av teorin för lösning av algebraiska ekvationer och ekvationssystem, varvid koefficienterna kunna vara reella eller komplexa tal eller element ur någon abstrakt talkropp.

I första bandet redogöres för lösning av system av förstagradsekvationer dels utan och dels med determinanter. I den determi-

nantfria teorien behandlas begreppet lineärt beroende och det därmed sammanhängande begreppet rang för en matris. Determinantteorin användes sedan för effektiv beräkning av lösningarna.

Andra bandet behandlar ekvationer av högre gradtal och omfattar bl. a. Galois-teorin. För att kunna garantera att varje ekvation är lösbar använder författaren icke den s. k. algebrans fundamentalsats, som ju ingenting utsäger för ekvationer vars koefficienter icke äro komplexa tal. I stället följer han en metod av Kronecker och Steinitz som innebär, att en ny större talkropp konstrueras i vilken ekvationen är lösbar och som omfattar den kropp ur vilken koefficienterna äro hämtade. Genom en dylik utvidgning kan varje ekvation lösas (jämför definitionen av de komplexa talen genom införandet av ett element i såsom lösning till $x^2+1=0$). Teorin för ekvationen blir då en teori för hur den utvidgade kroppen förhåller sig till koefficientkroppen.

I första bandet redogöres utförligt för alla de begrepp som författaren behöver i det följande. Boken utgör därför en utmärkt inledning till den moderna algebran.

Olof Hanner

O. Costa de Beauregard, *La théorie de la relativité restreinte.* Masson et Cie, Paris 1949, Pp. 173, 800 fr.

Detta arbete ger en god framställning av den speciella relativitetsteorien, avsedd såväl för den med ringa förkunskaper som för den i ämnet mer beläste.

Bokens styrka är det konsekventa fasthållandet vid relativitetens idé. Att så borde vara fallet, skulle kunna anses självklart, om det inte vore så att boken medvetet och energiskt skiljer sig från tidigare framställningar just genom sin konsekvens i detta metodiska avseende. Efter en klar översikt av relativitetens postulat och tensorräkningens grunder följer en detaljerad behandling av relativitetsteoriens kinematik jämte tillämpningar inom optiken. Efter den sistnämnda, betraktad som relativitetsteoriens rot, behandlas i tredje kapitlet elektromagnetismen såsom teoriens stam. Fjärde kapitlet inledes med en av teoriens stora frukter, satsen om massans och energiens ekvivalens, om vars upptäckt även Langevin får vara med på ett hörn. Det metodiskt intressanta i detta kapitel är att punktens dynamik härledes ur hydrodynamiken och inte tvärtom. På analogt sätt härledes dynamiken för en partikel med spinn ur dynamiken för en vätska med spinn. I sista kapitlet anknytes bl. a. till vågmekaniken.

Nils Svartholm

G. C. McVittie, *Cosmological Theory*, Sec. Ed. Methuen & Co. Ltd, London 1949. Pp. 103, 6 s. net.

I kosmologien betraktar man de samlade massorna i universum och söker framställa en teori för dessas uppförande. Kosmologien faller inom den allmänna relativitetsteoriens tillämpningsområde.

Författaren ger i första kapitlet en snabb orientering i vårt vetande om de extra-galaktiska nebulosorna. Efter denna följer en kort framställning av Riemann-rymden och tensorkalkylen. Han behandlar sedan den allmänna relativitetsteorien med tonvikt på den fysikaliska innebörden i denna. I det fjärde kapitlet begagnar sig författaren av de framställda fakta och teorierna och tillämpar dessa på ett växande universum, där materien är jämnt fördelad. Han kommer härvid fram till att den hittills observerade rymden endast är en bråkdel av det hela. Författaren lämnar frågan öppen, om rymden är hyperbolisk och oändlig eller sfärisk med mycket stor radie, men anför, att de astronomiska vittnesbörden, som tala för en hyperbolisk värld, överväga. Boken slutar med en kort beskrivning av Milnes kinematiska teori för universum, vilken av författaren anses ge en enklare tolkning av koordinaterna än den allmänna relativitetsteorien gör.

I den nya upplagan observerar man, att några förut vilsekomna indices i tensorbeteckningarna nu kommit på sin rätta plats. Tolmans förnämliga arbete: Relativity, Thermodynamics and Cosmology, som endast nämnes i förordet, har även i denna upplaga fått fel titel.

Eric Uggla

Paul Appell, *Cours de mathématiques générales. Analyse mathématique.* Sixième éd. entièrement refondue par G. Valiron. Gauthier-Villars, Paris 1951. Tome I IX+408 p., 2000 fr.; Tome II 434 p., 2200 fr.

Ej en avhandling, ej ett uppslagsverk utan en lärokurs där ordnandet av stoffet betingats av en önskan att gå från det enkla till det mera komplicerade, så ungefär karakteriserar Valiron denna bok av Appell, som han omarbetat. Såvitt anmälaren kan finna, och som författarenamnen ge anledning att förmoda, har även resultatet ur pedagogisk synpunkt blivit gott. På drygt 800 sidor förs en läsare med svensk realstudentkompetens upp till en nivå ungefär motsvarande fordringarna för två betyg vid våra universitet, även om stoffurvalet ej är exakt detsamma, men boken behandlar således ej blott analys utan innehåller även geometri och algebra.

Förf. fördjupar sig ej i irrationaltalens teori utan går snabbt över till den geometriska representationen av de reella talen och för med hjälp av vektorer (inkl. vektorprodukt) behandlingen av den analytiska geometrin i två och tre dimensioner fram till en diskussion av den allmänna andragradsekvationen i tre variabler. Därefter följer teorin för funktioner av en reell variabel med de vanliga satserna ur differential- och integralkalkylen. I anslutning till funktioner av flera variabler behandlas en del differentialgeometri i tre dimensioner, linjeintegraler samt tillämpningar på yt- och volymberäkning.

Del II börjar med differentialekvationer. Behandlingen av lineära ekvationer med konstanta koefficienter genomföres ej för allmännare ekvationer än andra ordningens med specialiserat högra membrum, men i gengäld behandlas system av lineära ekvationer och ett kapitel ägnas åt några enklare partiella ekvationer. Först härefter följer Taylors formel och, i anslutning därtill, teorin för serier. Förf. avstår från att införa begreppet likformig konvergens utan inskränker sig till att bevisa motsvarande kända satser för funktionsserier, som ha en konvergent, av variabeln oberoende, majorant i det betraktade intervallet (séries complètement convergentes), vilket säkert är en pedagogiskt lämplig begränsning. Komplexa tal införas och användas vid ekvationslösning; redan tidigare har förf. givit den »trigonometriska» lösningen av tredjegradsekvationen även med hyperboliska funktioner vid fallet en reell rot. Algebrans fundamentalsats omnämnes men bevisas ej. Dubbel- och trippelintegraler samt vektoranalysens integralformler behandlas men den allmänna formeln för variabelbyte ges ej ens för dubbelintegraler. Boken avslutas med kapitel om sannolikhetskalkyl och om determinanter och matriser. Omkring 400 exempel finnas för läsaren; de flesta äro dock utan svar.

Boken är lättläst och rikt illustrerad (230 figurer). Den blir trevlig och omväxlande genom talrika omnämnanden av praktiska konsekvenser och numeriska metoder samt genomförda tillämpningar bl. a. på fysikaliska problem. *Tord Ganelius*

Analogimaskiner, Konferens den 22—23 maj 1950. Forskarnas Kontaktorgan, Meddelande FKO Nr 9, Stockholm 1950. 100 s., kr. 12:—.

Från den konferens om analogimaskiner som anordnades av Ingeniörsvetenskapsakademien och Tekniska Fysikers Förening i maj 1950 föreligger nu en intressant och välgjord stencilerad rapport.

Analogimaskiner är apparater som mer eller mindre automatiskt löser system av ekvationer (algebraiska, differential- eller integral-) genom att låta sig hopkopplas till ett fysikaliskt system, vars variabler satisfierar ekvationerna. Den eller de oberoende variablernas förändring styres utifrån, och de beroende variablernas värden mätes. Benämningen »analogi-» motiveras av att man i en sådan apparat kan sägas studera ett fysikaliskt systems beteende genom mätningar på ett annat, »analogt» system. Området är alldeles nytt i Sverige, men utvecklingen går nu här som annorstädes mycket raskt, och det överraskade antagligen de flesta av de inemot 150 deltagarna i konferensen att redan få ta del av en så rik flora av idéer och konstruktioner.

Den raska utvecklingen och det stora intresse som konferensen väckte vittnar om den praktiska betydelse som analogimaskinerna tillmätes. Rapportens sammanställning av de mest skiftande apparater ger läsaren ett starkt intryck av att också deras principiella, vetenskapliga betydelse är avsevärd. Å ena sidan är analogier mellen olika fysikaliska processer synnerligen lärorika och ägnade att underlätta förståendet och därmed inlärandet t. ex. av en fysikkurs, varför man känner sig benägen att rekommendera en bok som denna till undervisningen i fysik och matematisk fysik på högskolestadiet; åtskilliga belysande exempel finns att hämta där. Å andra sidan är apparaterna själva intressanta och i visst avseende »analoga» till varandra. Den gemensamma teoretiska bakgrunden till åtskilliga av dem återfinnes i teorien för servomekanismer och informationsteorien. En utveckling har börjat, som kan leda till att den matematiska fysikens klassiska problem alltmer löses med maskiner, och att den tillämpade matematikens tyngdpunkt förskjutes mot studiet av dessa apparater själva.

I rapporten ges texterna till föredragen vid konferensen, i några fall dock ersatta med förkortade referat. De beskrivna apparaterna är fyra differentialanalysatorer, en maskin för lösning av integralekvationer, fem apparater för lösning av några partiella differentialekvationer, två för Fourier-analys och -syntes, en för beräkning av Fourierintegraler, en för beräkning av rötter till polynom och en för lösning av implicita ekvationssystem. Ytterligare några apparater för speciellare ändamål beskrivs och i ett föredrag redogörs för några amerikanska maskiner för lösning av lineära ekvationssystem.

Försöken att lösa partiella differentialekvationer har gett upphov till särskilt intressanta analogier. Potentialfält som lyda Laplace's ekvation blir tillgängliga för noggranna mätningar i den elektrolytiska tanken. Detta utnyttjas i SAAB:s gradienttank (L.

Stenström) för uppmätning av strömningshastigheterna kring en kropp i strömmande vätska eller gas, och som det synes, med överraskande hög noggrannhet. G. Svala redogör för en annan användning: automatisk uppritning av elektronbanor i elektriska fält. Men även nivån hos en spänd gummiduk satisfierar approximativt Laplace's ekvation, och elektronernas rörelse i ett elektriskt fält kan därför representeras av kulor som rullar på en sådan. Därvid motsvaras elektroderna i fältet av träklotsar som håller duken på bestämda ställen på en nivå som är proportionell mot potentialen hos motsvarande elektrod (T. Wallmark). L.-E. Zachrisson ger en metod att bestämma skjuvspänningar och vridstyvhet hos en stav av godtycklig genomskärning genom att mäta randlutning och volym av en såphinna som uppspänts i ett rör med samma genomskärning som staven, och B. Langefors en metod att bestämma spänningar i skalkonstruktioner (som t. ex. flygplanskroppar) genom mätningar på ett växelströmsnät.

Utrymmet tillåter inte ett utförligare omnämnande av de olika apparaterna, men det bör sammanfattningsvis sägas att rapporten ger en imponerande bild av svensk ingenjörsskicklighet och att flera av de apparater som beskrivs är i nivå med det bästa som finns utomlands.

Föredragen hölls för ett auditorium av fackmän och är i regel nog för kortfattade för att vara lättlästa för den som inte tidigare gjort bekantskap med området. En naturvetare bör emellertid få ut en hel del av ett studium, särskilt som föredragen genomgående är klart och begripligt framställda och med få undantag försedda med goda illustrationer. Litteraturreferenser finns inte med överallt; en kort allmän bibliografi hade utan tvivel varit ett värdefullt komplement till boken. *Göran Kjellberg*

Edmond Blanc et Léon Delhoume, *La vie émouvante et noble de Gay-Lussac,* Gauthier-Villars, Paris 1950, 278 p.

Redan titeln anger författarnas stora beundran för Gay-Lussac, en av sin tids främste naturforskare, vars liv (1778—1850) omfattar en omvälvningarnas tid i Frankrike. Han tecknas som barn livlig och uppfinningsrik, som student vid Ecole Polytechnique tidigt uppmärksammad och uppmuntrad av sina lärare. Redan vid 24 års ålder publicerade han det arbete över gasers utvidgning, som uttrycks i 'Gay-Lussacs lag'. Ett par år därfter slog han världen med häpnad genom att företaga två ballonguppstigningar (till 7000 m) för vetenskapliga iakttagelser, de första i sitt slag. Vid unga år medlem av franska vetenskapsakademien, professor

i både kemi och fysik utförde han en hel rad grundläggande undersökningar av kemiska, fysiska och tekniska problem.

Framställningen är stödd på utdrag ur Gay-Lussacs skrifter och brev, samtida dokument och uttalanden av vänner och forskare. Oreserverad är deras uppskattning av Gay-Lussac som initiativrik och skarpsinnig forskare, elegant experimentator, inspirerande lärare, god och stark människa. Av boken får man ett livligt intryck av ett rikt och fruktbärande samarbete mellan den tidens vetenskapsmän trots alla politiska slitningar i Frankrike. En rätt utförlig redogörelse för Gay-Lussacs insatser som medlem av Deputerade kammaren och som 'Pair de France' på 1830—40-talen ger glimtar av franskt parlamentariskt liv.

Boken, speciellt värdefull för den som intresserar sig för naturvetenskapernas historia, avslutas med en förteckning på av Gay-Lussac utgivna arbeten (111 st.). *Eva Ramstedt*

Norbert Wiener, *The Human Use of Human Beings.* Houghton Mifflin Company, Boston 1950, Pp. 241, $ 3.00.

En bok av Norbert Wiener läser man med samma förtjusning som pojkårens äventyrsböcker. Man beundrar den intellektuella spänsten, bländas av idérikedomen, njuter av de vida vyerna över traditionellt gränsskilda vetenskaper.

I sitt tidigare arbete, Cybernetics,[1] som väckte sensation i vetenskapliga kretsar världen runt genom sina djärva paralleller mellan kommunikationsproblemen hos människor och maskiner, var Wiener *matematiker* och cybernetiker. I sin nya bok har han ersatt det matematiska språket med en intensiv prosa. Grundtanken är densamma som förut: »It is my thesis that the operation of the living individual and the operation of some of the newer communication machines are precisely parallel.» Individens »uppfostringsmekanism» och maskinens feed-back är i grunden samma sak.

Samtidigt utvidgar han programmet till att omfatta cybernetiken och samhället, förhållandet *mellan* människor och mellan människor och maskiner. I denna bok har *samhällskritikern* och cybernetikern ordet. Dels påvisar författaren cybernetikens allomfattande innebörd, dels levererar han en våldsam kritik av det sätt varpå det moderna samhället (och främst det amerikanska) löst sina kommunikationsproblem. Genom att definiera begreppet kommunikation tillräckligt allmänt får han tillfälle att kritisera åtskilligt av det han tycker illa om (och det är inte litet). Han gisslar den naiva framstegstron (som strider mot termodynamikens andra lag), rätts-

[1] Rec. i Elementa *32* 1949, 215.

väsendet (representerat av patentlagarna), steriliteten hos den amerikanska litteraturen och mycket annat.

Det amerikanska skolsystemet kommer *universitetsläraren* och cybernetikern att se rött. Man utnyttjar ju inte den fina mekanismen! Jag kan inte neka mig nöjet att i dessa skolkommissionstider citera honom på den punkten: »There is a curious idea which is in vogue in this country that democracy involves an education which is not beyond the capacity of the dullest, and that any discrimination on the basis of intellectual ability ... is pernicious.» Hans hopp står till naturvetare med vid humanistisk orientering. Endast genom att riva murarna mellan vetenskaperna kunna vi, menar han, i det långa loppet hjälpa uppfinnarna vid de stora forskningslaboratorierna ur det nödläge, som annars kommer att inträda på grund av tömda förråd av grundforskningsresultat.

Liberalen och cybernetikern Wiener vill väcka de styrande i atombombens och matematikmaskinens tidevarv till besinning inför de tveeggade svärd som satts i deras händer. De nya maskinerna komma att orsaka en ny industriell revolution, och människan kommer i farozonen. Skall hon bli en slav under maskinen eller kanske under det totalitära maskineriet (som strider mot cybernetikens principer, därför att alla order gå i en riktning!)? Redan genom titeln på sin bok ger Wiener sitt svar. *Gunnar Blom*

Theodor Walcher, *Das Trockengleichrichter-Vielfachmessgerät.* Springer-Verlag, Wien 1950, X + 144 sid., $ 3.20, inb. $ 3.80.

Mätning av svaga växelströmmar och små växelspänningar, i synnerhet sådana av högre frekvens, var länge förenad med betydande svårigheter. Försöken att konstruera ett för rutinmätningar lämpligt instrument började krönas med framgång först omkring 1930, då torrlikriktaren, uppfunnen mer än femtio år tidigare, hade nått en sådan grad av fullkomning, att det blev möjligt att åstadkomma ett bekvämt, robust och billigt växelströmsinstrument med tillfredsställande noggrannhet inom ett stort frekvensområde.

Utvecklingsarbetet på universalinstrumenten, dvs. instrument med flera mätområden för lik- och växelström och -spänning och bestående av vridspolemätverk i kombination med torrlikriktare, kan nu anses ha nått en viss avslutning. Universalinstrument tillverkas av en mångfald firmor, och dylika instrument betraktas nu som oumbärliga på alla laboratorier, där elektriska mätningar förekomma.

Författaren till föreliggande bok har deltagit i utvecklingen av märkena Multizäta (Siemens) och Multavi (Hartmann & Braun).

Han är numera laboratoriechef vid Norma i Wien; Normametern är väsentligen hans verk.

Boken inledes med en elegant och jämförelsevis elementär framställning av torrlikriktarnas fysikaliska egenskaper. Förf. beskriver sedan i detalj universalinstrumentets konstruktion; kunskap härom är nödvändig för en rätt uppfattning om instrumentets möjligheter och begränsningar.

Därefter visas med en mångfald exempel, illustrerade med utmärkta figurer, universalinstrumentens vidsträckta användbarhet inom fysik och elektroteknik. Framställningen anknyter här till Normametern men är tillämplig även på andra instrument av liknande typ.

Dr Walchers bok, som veterligen saknar motsvarighet, har åtskilligt att lära även den som anser sig känna till det mesta om elektrisk mätteknik. Den rekommenderas varmt också åt dem som syssla med elektriska mätningar i skolans blygsamma format. Anmälaren har därifrån fått många goda uppslag för sin undervisning. — Boken framträder i förkrigsmässig Springer-utstyrsel.

Torsten Jönsson

Pringsheim & Vogel, *Lumineszenz von Flüssigkeiten und festen Körpern,* Verlag Chemie, Weinheim 1951, 240 S., 73 Fig., 24 Tab.

För dem, som önska en allmän orientering över luminescensens natur och praktiska tillämpningar, vilka med teknikens snabba utveckling på detta område blivit allt flera, är Pringsheims och Vogels tidigare översikt på engelska nu även tillgänglig i tysk version. I lättläst form redogöres i bokens första del för det teoretiska underlaget, försöksanordningar och mätteknik samt olika typer luminescerande ämnen och deras egenskaper. I andra delen kommer läsaren i kontakt med fluorescensanalysen och dess rika möjligheter samt luminescensens utnyttjande till ljuskällor i form av luminescerande färger, fluorescensskärmar och fluorescenslampor (lysrör). I en tredje del, som är nyskriven för den tyska upplagan, meddelar Pringsheim en del av senaste rönen beträffande tekniska och militära användningar av luminescensen, vilket dock av lättförklarliga skäl endast kan ske knapphändigt på grund av att resultaten antingen äro direkt hemligstämplade eller förknippade med teknisk-ekonomiska spörsmål. Detta nytillskott och rättelser av insmugna felaktigheter i originalupplagan har väsentligen ökat den föreliggande bokens värde. Enligt anmälarens åsikt skulle detta blivit än större, icke minst ur pedagogisk synpunkt, om tredje delens nya fakta inarbetats i sina logiska sammanhang direkt med tidigare kapitel, varvid samtidigt föråldrade uppfattningar kunnat ges något mindre betydelse och utrymme.

Gunnar Günther

K. H. Spring, *Photons and Electrons*, Methuen's Monographs on Physical Subjects, London 1950, Pp. 108, 7 s. 6 d.

De lagar enligt vilka elektromagnetisk strålning och materia påverka varandra spela en mycket stor roll inom fysiken och ha därför varit föremål för ett intensivt studium. De teoretiska uttryck, som man kommit fram till, äro ofta komplicerade men ge en mycket god beskrivning av de experimentella resultaten. Springs bok ger en god sammanfattande översikt över dessa samband i vad det gäller elektromagnetisk strålning och elektroner. Han går däremot inte in på frågan om fotonernas roll inom kärnfysiken. Efter en inledande allmän översikt behandlar han den fotoelektriska effekten, Comptoneffeken, röntgenstrålningen, Cerenkovstrålningen, parbildning och annihilation samt den mjuka komponenten i den kosmiska strålningen. Boken avslutas med en värdefull litteraturförteckning. Det torde knappast finnas någon gren av den moderna fysiken där inte fotoner och elektroner spela en betydelsefull roll, och boken kan därför rekommenderas åt varje fysikintresserad. *Sten von Friesen*

F. Twyman, *Metal Spectroscopy*. Charles Griffin & Co Ltd, London 1951, Pp. 569, 50 s. net.

Boken kan betraktas som en väsentligt utökad ny upplaga av förf:s tidigare arbete, The Spectrochemical Analysis of Metals and Alloys, som kom ut 1940. Under många år var denna bok en av de bästa på området, tills den som följd av den snabba utvecklingen blev föråldrad. Det var därför med stora förväntningar man fick i sin hand den sedan länge förberedda nya upplagan. Man blev inte besviken.

Twyman har ägnat ett långt liv åt optiken som ledare av instrumentfirman Adam Hilger Ltd, London, med spektrografer som ett huvudintresse, och han har även bidragit till utvecklingen av spektrografiska analysmetoder. Hans bok kan i viss mån betraktas som sammanfattningen eller kanske kröningen av ett livsverk. Twyman är icke ensam förf., trots att boken bär hans namn. Flera yngre vetenskapsmän och tekniker ha medverkat med kapitel på sina specialområden, vilket i hög grad bidragit till att göra boken så modern man kan begära.

Den inledande historiken är mycket intressant och fängslande så som man kan vänta, när den skrivits av en person som upplevt en stor del av utvecklingen och själv svarat för några väsentliga milstolpar på instrumentbyggandets område. Sedan följer ett

kapitel om elementär teori för atomspektra och därefter beskrivningar av spektrografer (med tonvikt på prismainstrument) samt olika hjälpapparater såsom spektrallinjefotometrar och elektriska ljusalstringsaggregat. Efter en allmän behandling av spektralanalytiska metoder och tillämpningsområden följer så ett stort kapitel om analys av metaller och legeringar med varje metall behandlad för sig ofta av egen namngiven förf. Referenserna äro talrika.

Boken behandlar väsentligen emissionsspektralanalys, och de mindre avsnitt som ägnats absorptionsanalys, Raman- och Röntgenspektrografi torde främst få tillmätas allmänbildande värde. Framställningen är genomgående enkel och lättillgänglig och tar sikte på praktiska förhållanden och praktiska erfarenheter. Teorier och formler äro mycket sällsynta. För varje person, som skall utföra spektrografisk analys är boken av stort värde, och den torde verksamt bidraga till spektralanalysens allt vidsträcktare användning, vilket säkerligen är dess väsentliga syftemål.

C. Georg Carlsson

H. H. Hopkins, *Wave Theory of Aberrations*, Oxford at the Clarendon Press 1950, Pp. 161, 15 s. net.

För dem, som syssla med konstruktion av korrigerade optiska system, har litteraturen berikats med ytterligare en bok. De aberrationer, som uppkomma på grund av »ofullkomligheten» i den geometriskt optiska strålbrytningen, kan uppfattas på olika sätt, antingen som en avvikelse i en stråles läge och riktning eller som deformationer i den från ett optiskt system kommande vågfronten. Tidigare litteratur i ämnet har behandlat den geometriska optiken enligt det förstnämnda sättet, och först sedan systemet ifråga genomräknats har man transformerat de härigenom erhållna data till vågaberration.

Dr. Hopkins har i första kapitlet i sin bok gått in på de generella sambanden mellan strålaberration och vågaberration för att i följande kapitel tillämpa dessa samband steg för steg på de olika fall av abberation, som förekomma i optiken.

Kapitelrubrikerna ge en uppfattning av innehållet: Våg- och strålaberrationer; Beräkning av vågfrontsaberrationer; Sinusvillkoret och Herschel-betingelsen; Allmän teori för olika aberrationstyper; Astigmatism; Första (tredje) ordningens aberrationer vid normal och skev brytning; Seidels teori om första (tredje) ordningens aberrationer; Beräkning av första (tredje) ordningens aberrationer; Allmänna egenskaper hos aberrationer vid enkla linser och linssystem; Totala aberrationen vid en yta; Asfäriska och reflekterande ytor.

I ett tillägg har Dr. Hopkins angivit lämpliga formler för trigonometrisk genomräkning av optiska system, inverkan av bländare samt tabeller över vissa funktioner av brytningsindex.

De i ovannämnda kapitelrubriker inom parentes nämnda aberrationsordningarna hänföra sig till i vårt land, Tyskland och U. S. A. gängse språkbruk. Man kan icke säga, att boken kommer med några nyheter eller genvägar, som kunna förenkla det arbete en räknande optiker måste göra. Den ger kanske i hela sin uppläggning riktigare synpunkter på aberrationerna och deras samspel.

Vare sig man uppfattar aberrationerna som deviationer i »strålar» eller vågfronter, så måste hela det tidsödande arbetet med analytisk bearbetning, intuition och trigonometrisk strålräkning dock utföras i sin helhet, och först därefter kan och bör vågaberrationen införas för att i beräkningarnas sista skede ge slutgiltig verifikation av systemets egenskaper. Detta är också den procedur, som författaren hyllar, och därom äro nog de flesta praktiskt räknande optiker ense. Vad man saknar i boken är ett kapitel om vågaberrationens inverkan på bilduppbyggnaden, vilket kanske vore det allra viktigaste i detta sammanhang.

Evert Aulin

K. A. Wingårdh, *Ljuset, dess natur och egenskaper*, Natur och kultur, Stockholm 1950, 174 s., kr. 4: 50.

Boken börjar med några sidor om den antika uppfattningen av ljuset och för sedan över Newton, Huyghens och Fresnel fram läsaren till den moderna teorin om ljusets dubbelnatur. Lektor Wingårdh finner under vägen anledning gå in på ljusets polarisation, spektroskopi, osynligt ljus, Dopplers princip, Wiens förskjutningslag, fotoelektriska effekten, Bohrs atomteori, materievågor och åtskilligt annat.

Populärvetenskapliga författare förfalla ofta till att i tid och otid tala i liknelser, som ger läsaren upplysning på någon punkt, men som i övrigt måste förvränga hans bild av naturen. Detta har författaren här lyckats undvika. När jämförelser någon gång förekomma, äro de befogade.

Den berättande tonen och den nästan fullständiga frånvaron av matematiska formler gör boken lättläst och lämpad som bredvidläsningsbok för intresserade elever i gymnasiet. Den sätter »kött på benen» på många områden inom optiken, som läraren på grund av pressen från studentskrivningen tvingas behandla ytterst summariskt.

Bengt Liljeqvist

O. Lindstad, *Fysikk og kjemi.* I serien »*Arbeidsmåten i den høgre skolen.*» Gyldendal Norsk forlag, Oslo 1950, 132 s., nkr 14:75.

Med den gemensamma titeln Arbeidsmåten i den høgre skolen utges i Norge en serie böcker under redaktion av rektor Herman Ruge. Det första bandet *Opdragelse og undervisning* — författat av Ruge — behandlar psykologi och pedagogik i allmänhet (användes som lärobok vid Uppsala universitet). I fortsättningen skola de olika ämnena behandlas i fristående arbeten. Lektor O. Lindstad i Oslo behandlar sålunda fysik och kemi.

Först som sist kan jag förklara, att jag funnit Lindstads arbete synnerligen intressant och mycket värdefullt. Det förtjänar en stor läsekrets och bör finnas i alla svenska skolor, där man studerar fysik och kemi. Lindstads syfte med boken är att ge handledning åt dem som börja som lärare, men boken har mycket att ge också åt dem som redan äro inne i frågorna. Han vill belysa det principiella i undervisningen och ger alltså inte en systematisk behandling av kurserna. Lindstad framhåller, att hans synpunkter och metoder inte behöva vara de bästa: varje lärare skall själv väga och döma.

Det är naturligt, att största utrymmet ägnats åt experimenten, deras inplacering i lärogången, apparaternas uppställning och vård, fördelning på demonstrationer och laborationer osv. Fysik får dubbelt så stor plats som kemi, vilket väl motsvarar ämnenas timtal i de norska högre skolorna. För en kemilärare på ett svenskt gymnasium ger boken därför för litet. Den mest givande och självständiga behandlingen få frågor som röra mekanik, där förf. är fackman (Anm. av Lindstads kompendium i mekanik se *Elementa 31* (1948), 184).

Med någon förvåning läser jag, att Lindstad rekommenderar att det »pensum», som behandlas teoretiskt i fysiken, i regel skall ges opreparerat till hemläxa. Givetvis har det stor betydelse för eleverna att genom eget arbete sätta sig in i en tankegång, men är det verkligen *arbetsskolans princip,* att kunskaperna skola förvärvas genom arbete *hemma*? Lindstad säger, att det välmenta uttalande man kan höra elever göra om sin lärare, att han är så »flink», att han förklarar, så att allt blir så lätt, är en mycket tvivelakig komplimang för honom som pedagog! Nog vill jag tro, att en lektion, där en teoretisk uppgift förberedes under elevers uppmärksamma medverkan är en arbetsprestation inte bara för läraren.

Det är ju så att pojkar ha reda på mycket, som inte flickor känna till: motorer, bilackumulatorer osv. Lindstad vill inte gå in på frågan om flickors svagare intresse för den fysiska omvärlden ligger i deras natur. Han menar i varje fall, att om läraren kan

väcka intresset, är skillnaden mellan pojkar och flickor inte så stor som det påstås. Ändå föreslår han, att man skall ta hänsyn till flickor t. ex. genom att anknyta undervisningen till hemmet: då man bestämmer täthet skall någon ta med en sked e. d. hemifrån, man skall väga och mäta bär, ta koksalt från en påse i köket och inte ur kemisalens burk osv. Vilja flickorna själva och vilja de kvinnliga magistrarna läsa i särklass? Här finns något att diskutera.

Det exempel som lämnas på anordnandet av laborationer är värt uppmärksamhet. Klassen skall i förväg ha fått reda på uppgiften och ha studerat den i en utlämnad vägledning. På rasten komma ett par elever och hjälpa läraren att duka. Sedan muntliga anvisningar givits, arbeta lärjungarna »utan inblandning från lärarens sida». Mot denna *metod* kan ingenting invändas, men — ett allvarligt men — i den vägledning, som lämnats ut, omtalas resultaten! »Du ser att karet med tilbehør er blitt en strømkilde.» Fysiklaborationer i gamla stilen med bestämning av sedan 1800-talet välkända konstanter ha givetvis värde för inlärande av mätteknik och apparatkännedom. Nu vill jag sätta i fråga, om inte en laboration, till vilken eleverna komma oförberedda, inte mottagas med dukade bord, instrueras muntligen och själva arrangera försök över för dem nya frågor är mera i arbetsskolans stil. I annat sammanhang påpekar förf. just betydelsen av *nyhetens intresse* — kemiundervisningen slipper »de koncentriska cirklarna», som äro ett krux för fysiken, säger Lindstad. Men vår nya enhetsskola ... äro inte de koncentriska cirklarna en finess i dess kursplaner?!

Man ägnar tydligen stor omsorg åt gaserna i den knappt tilltagna tiden för kemi. Meningen med den pneumatiska kemien är att verkligen härleda formlerna för gasmolekyler. Bestämning av litervikt kan väl då vara överflödig, ty principen ges ju i fysiken och värdena finnas ju i tabeller. Det fasta tillståndets kemi vore enligt min åsikt värt större uppmärksamhet. De vackra undersökningarna över sura och basiska oxider vid Norges tekniska högskola ha gett detta område nytt intresse. Ett apropos: reaktionen mellan järn och svavel uppges vara teoretiskt riktig, men praktiskt vansklig. Här delar jag inte Lindstads åsikt. Som praktiskt exempel på en reaktion med påtagliga förändringar är det utmärkt, som kvantitativt försök just teoretiskt olämpligt, eftersom reaktionsprodukten är en fast lösning av S i FeS. Resultatet blir ju därefter, och visst har »reagensglasset lett for å sprekke».

En stor förtjänst är varningen för alltför lättvindiga slutsatser av försöken: man skall säga, att ett visst resultat tyder på en viss lag, att en viss reaktionsprodukt ser ut som det eller det ämnet och att närmare undersökningar bestyrkt förmodandet. Ett par utmärkta

exempel på tvetydiga försök lämnas. I diskussionen om försöket med syror av olika styrka men samma koncentration skymtar en detalj, som jag fäst mig vid: hydroniumjonen har införts som syrornas särmärke, men den enda basen är hydroxidjonen, ty neutralisation har fastställts att vara reaktionen mellan just dessa två. Brönsteds »teori» är detta i varje fall inte. Många goda råd givas, särskilt beträffande försök, som kunna bli farliga.

Om också några av mina påpekanden fått kritisk eller skeptisk utformning, är det inte meningen att därmed förringa värdet av denna trevliga bok. Med dessa rader har jag velat visa, att boken förutom sitt egentliga syfte kan bli en rik och frisk källa till pedagogisk debatt. *Bertil Englund*

Karl Freudenberg, *Organische Chemie.* Lambert Schneider Verlag, Heidelberg 1947. 5. Aufl., 232 S., DM 6: —.

Karl Freudenberg, själv en mycket framstående forskare, har här givit en klar och kortfattad framställning av den organiska kemins grunder. Uppställningen är strängt systematisk med indelning efter substitutionsgraden (enkel, dubbel, tre- eller fyrfaldig substitution). Den moderna elektronteorin omnämnes utan att dock helt genomsyra boken. Någon gång kan man påträffa ett mindre lyckligt arv från äldre läroböcker, såsom t. ex. det mycket seglivade skrivsättet för purinderivatens strukturformel med pyrimidinringen formad som en rektangel i stället för som en sexhörning.

Boken lämpar sig framför allt för självstudium men även för nybörjarstadiet vid högskolor. Det facila priset bör också kunna bidra till att göra den spridd. *Gösta Lindstedt*

Bernard Jaffe, *Crucibles: The Story of Chemistry from Ancient Alchemy to Nuclear Fission.* Hutchinson, London 1949, 480 s., kr. 16: 20.

Professor Jaffes avsikt är ej att ge en detaljerad beskrivning av utvecklingen inom kemiens olika områden utan att söka framföra de ledande principernas uppkomst hos forskarna. Detta sker genom att följa dem i deras arbete och tankegång, vilket göres på ett så livfullt och fantasirikt sätt att läsningen av boken blir en spännande roman. Bland ett sjuttontal dylika fylliga levnadsbeskrivningar återfinnas på hedersplats Berzelius, Scheele, Arrhenius och ytterligare några svenskar. I synnerhet de senaste årtiondenas framsteg inom den fysikaliska kemien följas med stor intensitet. Ett hundratal sidor ägnas åt atomsprängning och bjuder på aktuellt stoff

fram till år 1949. Den som möjligen tror att kemiens historia är enformig läsning blir i denna bok grundligt övertygad om motsatsen.

Framställningen är lysande och boken — nu i sin tredje upplaga — skriven på så populärt språk att varje bildad person kan avnjuta den även utan kemiska kunskaper. Den förtjänar stor spridning. *E. Nordefeldt*

K. A. Wingårdh, *Underliga ämnen.* Några blad ur vetenskapens historia. Natur och Kultur, Stockholm 1951, 176 s., kr. 5: 50.

Med anknytning till »underliga ämnen» ger förf. en intressant orientering i fysikens och kemiens historia, alltifrån antiken och araberna (de gamla elementen) över alkemisterna (de vises sten) genom den nyare kemiens gryning och ända fram till vår tid. Man möter elden (flogiston), värmet, ljuset, världsetern, elektriciteten och magnetismen. Förf. har en berömvärd talang att försynt tangera det mänskliga bakom de ofta torra namnen på de män, som stå för upptäckterna. Man förstår, att alla dessa — såväl ärade heroer som enkla, stillsamma lärde — ha levat sitt liv, haft bekymmer som andra, och kanske fått sin lön först »av en domstol, satt i minnets drömvärld bortom döden». Boken är ej avsedd som lärobok i fysik och kemi, men råkar likväl vara ett gott komplement till kurserna i dessa ämnen, och den bör vara utmärkt lämpad som premiebok.

Det enda beaktansvärda tryckfel, som rec. påträffat, är i en liten not på sid. 75, där 1 *gran* sättes lika med 6.20 g. Det bör vara 6.20 cg (eller kanske ännu bättre: 6,185 cg). *J. Tandberg*

Herbert McKay, *Leksaker och uppfinningar.* Natur och Kultur, Stockholm 1951, 188 s., kr. 7: 50.

Boken ger en populär orientering inom flera grenar av tekniken genom att utgå från kända leksaker, som ha samband med de tekniska produkterna. Sålunda lämnar den roterande snurran förklaring till gyroskopet och gyrokompassen, belyser fördelar med refflade lopp i skjutvapen och förklarar jordens rörelse i rymden. Stroboskopet förbereder biografens filmbilder, draken föregår flygmaskinen, den prismatiska glasbiten leder till spektroskopet och spektralanalysen. På ett lättförståeligt sätt blir läsaren bekant med den konstgjorda horisonten hos ett flygplan, autopiloten, ljudfilmen, regnbågen, vindmotorn, vattenturbinen och mycket annat. Boken är närmast avsedd för unga läsare.

J. Tandberg

Statens institut för folkhälsan. Pedagogisk skriftserie nr 6, utgiven av Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning genom lektor Bror Gustaver. Stockholm 1951, 64 s., kr. 3:50.

Föreliggande häfte har tillkommit med anledning av ett studiebesök som Föreningen för mat.-naturv. undervisning gjorde vid Statens institut för folkhälsan under årsmötet 1949. Där iakttogs då så mycket av kemiskt intresse för läroverkens lärare att det befunnits önskvärt att insamla och utgiva ett antal av institutets analysmetoder som lämpa sig som undervisningsexperiment och elevlaborationer. Lektor Bror Gustaver har gjort sig mödan att redigera häftet och lyckats härmed på ett tilltalande sätt.

Efter en inledande framställning av institutets föreståndare professor E. Abramson över institutets organisation och arbetsområden följer en närmare redogörelse för de olika avdelningarnas verksamhet. Den utförliga experimentella delen, som omfattar ca halva häftet, ger noggranna instruktioner rörande utförandet och beräknandet av ett stort antal analyser. Här behandlas bl. a. påvisande av metalljoner och kvantitativ bestämning av en rad olika joner i vattenprover, analys av livsmedel såsom kakaopulver, margarin, mjölk, fetter och oljor, ost, maltdrycker samt bestämning av C-vitaminhalt i bär och frukter.

De flesta av undersökningarna kunna utföras med den utrustning som brukar finnas i ett gymnasiums kemiska laboratorium. Då de dessutom ha ett påtagligt praktiskt intresse för många elever kan häftet rekommenderas till de kemilärare som önska pröva nya uppslag i sin undervisning. *E. Nordefeldt*

Recensenter i detta häfte: Ingenjör E. Aulin, Lidingö; fil. lic. G. Blom, Stockholm; civilingenjör C. G. Carlsson, Stockholm; lektor B. Englund, Uppsala; prof. S. v. Friesen, Lund; fil. lic. T. Ganelius, Stockholm; fil. lic. G. Günther, Stockholm; fil. lic. O. Hanner, Stockholm; lektor T. Jönsson, Stockholm; fil. kand. G. Kjellberg, Stockholm; assistent B. Liljeqvist, Stockholm; fil. dr G. Lindstedt, Stockholm; lektor E. Nordefeldt, Stockholm; lektor Eva Ramstedt, Stockholm; docent N. Svartholm, Stockholm; prof. J. Tandberg, Stockholm; assistent E. Uggla, Stockholm.

Gradualavhandlingar[1]

CARL VICTOR JONSSON, *Studies on five-dimensional relativity theory.* Arkiv för fysik, band 3 nr 8. Disp. vid Stockholms Högskola den 5 maj 1951. Opponenter: docent BJÖRN BRUNO och docent STIG HJALMARS.

Ända sedan Einstein år 1915 lyckats uppställa de kovarianta ekvationer som beskriva gravitationsfältet, varigenom den allmänna relativitetsteorien erhöll sin slutgiltiga form, har man försökt generalisera dessa ekvationer, så att de skulle omfatta även elektromagnetiska fält och, efter upptäckten av mesonerna, även fält svarande mot laddade partiklar med heltaligt spin och med vilmassan 0. Införandet av en femte dimension har spelat en stor roll vid dessa försök. I den form av den femdimensionella teorien som har utarbetats av prof. O. Klein äro alla fältstorheter periodiska funktioner av den femte koordinaten x^0. Metriken beskrives av linjeelementet

$$d\sigma^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{4} \gamma_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

och teoriens uppgift är att uppställa de fältekvationer som bestämma fundamentaltensorn $\gamma_{\mu\nu}$ och att lösa dessa ekvationer.

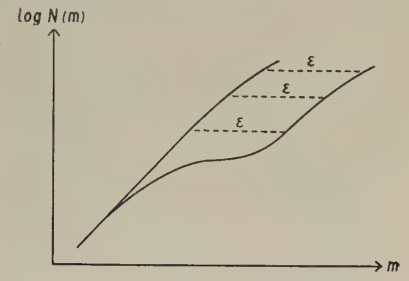
Den första delen av detta program har genomförts i första delen av avhandlingen, där de femdimensionella fältekvationerna äro givna explicit med hjälp av en direkt räkning. Därvid har koordinatsystemet valts så, att de fem tensorkomponenterna γ_{00}, γ_{01}, γ_{02}, γ_{03}, γ_{04} äro oberoende av x^0, vilket underlättar tolkningen av ekvationerna. Det bevisas även att ett sådant koordinatval alltid är möjligt.

Den andra delen av programmet är betydligt svårare, och en exakt lösning är för närvarande ogenomförbar. Ekvationernas art gör att det även är svårt att finna en rationell approximationsmetod. I ett arbete av år 1946 har Klein undersökt det fall, då fundamentaltensorns komponenter avvika obetydligt från sina normalvärden ($\gamma_{\mu\nu}=1$ om $\mu=\nu$, $\gamma_{\mu\nu}=0$ om $\mu\neq\nu$), för att om möjligt få en uppfattning om de fysikaliska resultat man kan vänta sig av teorien. Denna approximation, som leder till en linearisering av fältekvationerna, har närmare undersökts i andra delen av avhandlingen. Det visar sig därvid, att ekvationerna då beskriva fält, som svara mot laddade partiklar med spin $2\hbar$. En explicit kvantisering av dessa fält har utförts.

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

EJNAR LYTTKENS, *Problems of dark nebulae, treated by the method of moments,* Nova acta regiae societatis scientiarum upsaliensis, Ser. IV, Vol. 15, No. 2, 1951. 89 s. Disputation i Uppsala den 31 mars 1951. Opponenter: observator CARL SCHALÉN och fil. lic. TORD ADOLFSSON.

Ett område, där en mörk nebulosa förekommer, framträder som särskilt stjärnfattigt. Den mörka nebulosans inverkan på de apparenta magnitudernas fördelning åskådliggöres i allmänhet med ett s. k. Wolfdiagram (se fig.). Låt $N(m)$ beteckna antalet stjärnor per kvadratgrad ljusare än den apparenta magnituden m. I Wolfdiagrammet avsättes $\log N(m)$ som funktion av m, dels för det mörka området, dels för ett ljust jämförelseområde, där stjärnornas rymdfördelning antages vara densamma som i det mörka området. När effekten av nebulosan helt gjort sig gällande, är det horisontella avståndet mellan kurvorna i Wolfdiagrammet lika med nebulosans totalabsorption, ε, uttryckt i magnituder.



Ett schematiskt Wolfdiagram. Den nedre kurvan avser det mörka området, den övre kurvan ett ljust jämförelseområde.

De fundamentala kvantiteter som användes i avhandlingen är

$$S_j = B\left\{\overline{(m_c+\varepsilon)^j} - \overline{m_d^j}\right\}$$

där $\overline{m_j^d}$ är medelvärdet av m^j för stjärnor ljusare än m_l i det mörka området; m_l är så valt att det horisontella avståndet mellan kurvorna i Wolfdiagrammet uppnått sitt maximivärde, ε; $\overline{(m_c+\varepsilon)^j}$ är medelvärdet av $(m+\varepsilon)^j$ för stjärnor ljusare än $m_l-\varepsilon$ i det ljusa området. B är antalet stjärnor per kvadratgrad i det mörka området, ljusare än m_l.

Antalet stjärnor per kvadratgrad framför en nebulosa, vars utsträckning i synlinjens riktning kan försummas, är S_1/ε, och är rymdfördelningen bestämd med hjälp av det ljusa området, kan man bestämma det avstånd r_1 för vilket antalet stjärnor per kvadratgrad närmare än r_1 uppnått värdet S_1/ε; r_1 är då det sökta avståndet till nebulosan. Om antalet stjärnor ljusare än m i det

ljusa området är proportionellt mot $10^{\beta m}$, kan avståndet i parsec till nebulosan också beräknas ur formeln

$$5 \log r_1 = \frac{S_2}{2S_1} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\log e}{\beta} + 5 - M_0$$

där M_0 är medelvärdet av de absoluta magnituderna i ett rymdelement.

Om de värden på avståndet som erhålles med dessa båda metoder ej stämmer överens, kan det bero på att nebulosans utsträckning i synlinjens riktning icke kan försummas. I detta fall bestämmes först djuputsträckningen med hjälp av för ändamålet konstruerade nomogram, varefter avståndet kan bestämmas.

Andra frågor, som behandlas i avhandlingen, är inverkan av att ε varierar inom det mörka området och momentmetodens tillämpning i det fall, då det horisontella avståndet mellan kurvorna i Wolfdiagrammet icke uppnått sitt maximivärde inom det magnitudintervall som observationerna omfattar.

Tidskrifter

Populär astronomisk tidskrift, 1951: 1—2.

Ur innehållet: Aina Elvius, Om ljusets polarisation i spiralnebulosornas stoftmoln; C. Schalén, Om Cygni och andra liknande stjärnor; E. Bergstrand, En bestämning av ljushastigheten och dess användning för avståndsmätning; E. Holmberg, Om luminositetsfunktionen för stjärnor av typ I; N. Herlofson, Stjärnfallens fysik; Y. Öhman, Solkoronan observerad i Saltsjöbaden.

Science Progress, London 1951: April.

Ur innehållet: Facts about Crystals; Archæological Dating by Radioactive Carbon; Controlled Plant Breeding; The Surface Activity and Germicidal Properties of Quarternary Ammonium Compounds; Antiferromagnetism. Recent Advances in Science: Astronomy, Physics, Chemistry, Geology, Plant Physiology, Entomology. Notiser och bokanmälningar.

Discovery, London 1951: March, April, May.

Ur innehållet: Antibiotics and Plant Protection; Electronic Flash Photography; Enzymes; Physiological Factors in Aviation; Oceanography and Petroleum; The Flora of Australia; Robert Boyle; High-pressure Chemistry; The Pasteur Institute; Matter Moved by Light; Science in the Festival of Britain. Ett stort antal notiser under rubriken »The Progress of Science». Bokanmälningar.

Problemavdelning[1]

Matematiska uppgifter

1752) *Två klot med radierna a och b ligga utanför varandra. För att en linje skall kunna tangera klotytorna i A och B måste dessa punkter tillhöra vissa områden på respektive klot. Vilka äro dessa, och hur förhålla sig deras ytor?* X.

1753) *Om axeln i en homogen sfärisk sektor, upphängd i en punkt av »kantcirkeln», ställer sig vågrät, vilken är sektorns medelpunktsvinkel?* N. J.

1754) *Sök orten för punkter så belägna, att av de normaler, som från dem kunna dragas till parabeln* $y^2=4ax$, *en är bissektris till vinkeln mellan de båda andra.* I. Gunsjö

Enklare matematiska uppgifter[2]

Rättelse: Uppg. 1731 i 33 (1950), s. 282 bör lyda: I triangeln ABC är $a-b=3{,}457$ m, osv.

1755) Man bildar par av hela positiva tal så beskaffade, att kvadraten på det större talet i paret är lika med kuben på det mindre talet. Hur många sådana par finnas inom talområdet 1000—100 000?

Svar: 15.

1756) För uppritning av en viss oregelbunden n-hörning måste 31 bestämningselement vara givna. Beräkna n.

Svar: 17.

1757) Tre positiva tal bilda en aritmetisk serie. Deras summa är 99, deras största gemensamma divisor är 3 och minsta gemensamma dividend 3465. Vilka äro talen?

Svar: 21, 33 och 45.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Banérg. 33, Stockholm Ö.

[2] Uppg. 1755—1764 äro insända av *T. Edqvist.*

1758) Under sista kriget har man ibland praktiserat följande metod för att spara cigarretter. Man röker $^2/_3$ av varje cigarrett. Av stumparna gör man nya cigarretter med tobaken från tre stumpar i varje. Hur många cigarretter måste man minst förfoga över från början för att på detta sätt kunna röka tre cigarretter dagligen under en månad på 28 dagar?

Svar: 57 st.

1759) I en plan skärm finnes en kvadratisk spalt $ABCD$ med sidan a. På förlängningen av diagonalen CA åt A till är en punkt E så belägen, att $AE=a\sqrt{2}$. En i kvadratens plan kring E vridbar, plan ogenomskinlig skärm är försedd med en rätlinig rand, riktad genom E och större än $2a\sqrt{2}$, som i utgångsläget är parallell med AD. Genom att vrida denna skärm en vinkel v från utgångsläget kan spalten helt eller delvis täckas. Angiv den obetäckta spaltytan som funktion av v.

Svar: $a^2(3-2\operatorname{tg} v-0{,}5\operatorname{cot} v)$ för $0{,}5<\operatorname{tg} v<1$ och $a^2(2\operatorname{cot} v+ +0{,}5\operatorname{tg} v-2)$ för $1<\operatorname{tg} v<2$.

1760) I en amperemeter var visarens vridningsvinkel (räknad från noll-läget) proportionell mot strömstyrkan. Den från 0 till 20 A graderade skalan utgjordes av en cirkelkvadrant. Om man hade indelat denna båges korda i lika stora delar från 0 till 20, hade man fått en skala, oriktig överallt utom i tre punkter. (Avläsningen tänkes ske på skärningspunkten mellan kordan och den tunna visaren.) Antag, att visaren gör ett utslag på α radianer. Hur stor är differensen mellan den på kordan och den på bågen avlästa strömstyrkan? För vilket värde blir differensen ett maximum? För vilken verklig strömstyrka ger en avläsning på kordaskalan det största felet?

Svar: $\dfrac{20\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\dfrac{40\alpha}{\pi}$. Ur ekv. $\sin 2\alpha=0{,}5(\pi-2)$ fås $\alpha_1=17{,}4°$ och $\alpha_2=72{,}6°$. För 3,87 och 16,13 A.

1761) En halvcirkel med diametern $AB=2$ cm är given. Genom bågens mittpunkt M drages en linje, som skär AB i C, så att $\angle MCB=60°$. Sök radierna i de två cirklar, som tangera AB, MC och bågen.

Svar: $(3\sqrt{2}-4)$ cm och $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ cm.

1762) Uttryck i grader den vinkel, x radianer, för vilken $\sin(\sin x)=0{,}5$.

Svar: $13{,}57°$ och $148{,}43°+n\cdot 360°$.

1763) Angiv ekvationerna för de linjer genom $(-1; 3)$ som med linjen $x-3y=1$ bilda likbenta rätvinkliga trianglar.

Svar: $3x+y=0$; $x+2y-5=0$; $2x-y+5=0$.

1764) Linjen $x-3y=0$ vrides kring origo 45° i negativ led, varvid punkten P (3; 1) intar ett nytt läge Q. Angiv koordinaterna för Q.

Svar: $(2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

Lösn. till uppg. 1724—1726

1724) *Centrum för den kring triangeln ABC omskrivna cirkeln är O. Centra för triangelns in- resp. vidskrivna cirklar äro I, I_a, I_b och I_c. Visa, att den största av trianglarna OII_a, OII_b och OII_c har lika stor yta som de båda andra tillsammans.* X.

1. Man får $II_a = a : \cos\frac{1}{2}A = 2R\sin A : \cos\frac{1}{2}A = 4R\sin\frac{1}{2}A$ och höjden från O mot II_a blir $R\sin\frac{1}{2}(B-C)$, $(B>C)$. Ytan $OII_a = 2R^2\cos\frac{1}{2}(B+C)\cdot\sin\frac{1}{2}(B-C) = R^2(\sin B - \sin C)$. Analogt bli de andra ytorna $R^2(\sin A - \sin B)$ och $R^2(\sin A - \sin C)$, om $A>B$.

Sb.

2. De inre bissektriserna till triangeln ABC skära varandra i I, de yttre bilda triangeln $I_aI_bI_c$ (kallad T') i vilken punkten I är höjdernas skärningspunkt. Linjen IO är därför den Eulerska linjen till T' (se studentuppg. 8, jan. 42). Denna linje går även genom tyngdpunkten. Problemet är därför, emedan sidan OI är gemensam för de tre trianglarna, återfört på en känd sats: Till en rät linje genom en triangels tyngdpunkt dragas normaler från hörnen. Då är, räknat med tecken, summan av dessa normaler=0. Bevis: Summan av två normaler med samma tecken dragna från A och B kan ersättas med dubbla normalen från AB:s mittpunkt. Likformiga trianglar visar, att normalen från C har denna storlek.

G. Danielsson

Även löst av *N. J.*

1725) *I den regelbundna femhörningen ABCDE med sidan a skära diagonalerna AD och CE varandra i F. Bestäm riktningen och storleken av axlarna i den ellips, som går genom B, C och D samt har centrum i mittpunkten på AF.* *N. J.*

En linje genom AF:s mittpunkt O parallell med CF råkar ellipsen i G. $OD=a\sqrt{5}:2$ och $OG=b$ äro konjugatdiametrar, som tagas till koordinataxlar. Punkten C $(a; \frac{1}{2}a)$ satisfierar ekv. $4b^2x^2+5a^2y^2=5a^2b^2$, varför $b=\frac{1}{2}a\sqrt{5}$. Då OG och OD alltså äro de lika långa konjugatdiametrarna, halverar storaxeln vinkeln GOD.

Om halvaxlarna äro A och B, gäller att $A^2+B^2=5a^2:2$ och $A^2:\cos^2 36=B^2:\sin^2 36=A^2+B^2$. Alltså är $2A=a\sqrt{10}\cos 36°$ och $2B=a\sqrt{10}\sin 36°$. *Sb.*

Även löst av $\sqrt{\infty}$.

1726) *Konstruera skärningspunkten H mellan diagonalerna BE och CF i den regelbundna sjuhörningen ABCDEFG, om punkterna A och G äro givna. Bestäm förhållandet mellan sidorna i triangeln ALG, där L är tyngdpunkten i triangeln AHG. Var ligger medelpunkten till cirkeln GIK, där I halverar GH och K är skärningspunkten mellan diagonalerna AD och CG?* *N. J.*

Vi sätta $AG=2$, $AH=x$, $BH=y$. Då $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BCH=3\alpha$, $\sphericalangle CBH=\sphericalangle CHB=2\alpha$, där $\alpha=\frac{1}{7}\pi$, fås $2:\sin 2\alpha=y:\sin 3\alpha$ och $x^2=y^2+4-4y\cos 3\alpha$, varav $x^2-4=(4\sin^2 3\alpha-8\sin 3\alpha\cos 3\alpha\sin 2\alpha):\sin^2 2\alpha=(4\sin^2 3\alpha-4\sin 6\alpha\sin 2\alpha):\sin^2 2\alpha=[2(1-\cos 6\alpha)+2(\cos 8\alpha-\cos 4\alpha)]:\sin^2 2\alpha=2(1-\cos 4\alpha):\sin^2 2\alpha$ dvs. $x=2\sqrt{2}$. AH och GH äro alltså = diagonalen i den kvadrat som uppritas på AG. Höjden i triangeln AGH blir $\sqrt{7}$, varför $AL=\frac{4}{3}$ och förh. $2:2:3$. Till sist är $AI=2$ och $AKCB$ en romb, varför det sökta centrum befinnes ligga i A. *S. B.*

Uppg. 1724—1726 även lösta av *I. Gunsjö.*

Om trerektangulärt hörn

I en tresidig pyramid äro sidoytorna A, B och C rätvinkliga trianglar och basytan H, »hypotenusaytan», en godtycklig triangel. Om sidoytorna, vilka bilda vinklarna α, β och γ med basytan, projicieras på basytan, fås $H=A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma$. Projicieras åter H på sidoytorna, fås $A=H\cos\alpha$, $B=H\cos\beta$, $C=H\cos\gamma$. Härav erhålles $H^2=A^2+B^2+C^2$ och $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Projicieras ett godtyckligt stycke Y av H på A, B och C och projektionerna äro Y_1, Y_2, Y_3, så fås $Y_1=Y\cos\alpha$, $Y_2=Y\cos\beta$, $Y_3=Y\cos\gamma$, varav $Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2=Y^2$.

Uppg. 7 specialkurs mars 1951 (se sid. 137) löses enkelt med hjälp av denna sats. Om Y är ytan av fyrhörningen $AEA'E$, erhålles $Y^2=(b^2+c^2)x^2-2ab^2x+b^2(a^2+c^2)$ osv.

S. B.

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen

Mars 1951

Matematiska uppgifter för latinlinjen[1]

1. Kring en likbent triangel är en cirkel omskriven. Bestäm triangelns vinklar, då cirkelns radie är $^3/_5$ av höjden mot basen.
2. I en konvergent oändlig geometrisk serie är första termen 3. Summan av alla termer med jämnt ordningsnummer är 2. Beräkna summan av alla termer med udda ordningsnummer.
3. Ur Statens järnvägars tabeller över zontaxor erhålles följande sammanställning:

Avstånd	20	40	60	80	100	140	180	220	260	300	340	km
Pris för enkel resa	1.50	3.00	4.50	6.00	7.80	10.80	13.80	16.20	18.00	19.80	21.60	kr
Pris för tur o. retur	2.30	4.50	6.80	9.00	11.70	16.20	20.70	25.20	29.70	34.20	38.70	kr

Beräkna härav för varje uppgivet avstånd den besparing man gör genom att lösa tur- och returbiljett i stället för två enkla biljetter. Åskådliggör denna besparing grafiskt (avståndet avsättes på den horisontella axeln, millimeterrutat papper användes), och ange därefter med hjälp av diagrammet, för vilket avstånd besparingen blir störst.

4. I en rätvinklig triangel är ytan 139 cm² mindre än kvadraten på hypotenusan. Summan av kateterna är 17 cm. Beräkna triangelns sidor.
5. I en månghörning dragas samtliga diagonaler. Summan av antalet sidor och diagonaler är 171. Hur många sidor har månghörningen?
6. Bissektrisen BD i triangeln ABC är 12 cm och vinkeln BDA 60°. Sidorna AB och BC förhålla sig som 2 : 3. Bestäm sidan AC och vinkeln BAC.
7. I en triangel ABC är sidan AC 3 dm, sidan BC 8 dm och vinkeln C 60°. Bissektrisen till vinkeln C och mittpunktsnormalen till sidan AB skära varandra i punkten P. Bestäm avståndet PC.

[1] Uppg. i matematik för nyspråkligt lyceum utgjordes av latinlinjens nr 1, 3—8 och reallinjens (allm. kurs) nr 3.

8. En rätvinklig triangel är inskriven i en cirkel. Summan av kateterna är 20 cm. Bissektrisen till den räta vinkeln utdrages, så att den bildar en korda i cirkeln. Beräkna längden av denna korda.

Resultat: **1.** 48,18°; 65,91°; 65,91° (cos för toppvinkeln $=\frac{2}{3}$). **2.** 4. **3.** 180—220 km. **4.** 5 cm, 12 cm, 13 cm. **5.** 19. **6.** 10 cm; 100,9°. — Om BD förlängd skär omskrivna cirkeln i P och M är AC:s mittpkt samt $AC=10x$ cm, så är $DM=x$ och $DP=2x$, varefter kordasatsen ger $x=1$ och $AC=10$ cm; $\operatorname{tg} \sphericalangle MPC=5:\sqrt{3}$ osv. **7.** $\frac{1}{3}\sqrt{363}=6{,}351$ dm. **8.** $\sqrt{200}=14{,}14$ cm. — I varje triangel ABC gäller, att bissektriskordan $PC=(a+b):2\cos\frac{1}{2}C$. Utdrages nämligen AC ett stycke $CE=a$, är $\triangle AEB\sim\triangle CPB$, varför $AE:PC=BE:BC=2\cos\frac{1}{2}C$. Svaren till uppg. 7 och 8 erhållas omedelbart härav. — En enkel geom. lösning till nr 8 är följ.: Fäll från P (se ovan) normaler mot kateterna och drag PA och PB. Härvid uppkomma en kvadrat och två kongruenta trianglar. Kvadratens sida är hälften av kateternas summa varav dess diagonal $PC=10\sqrt{2}$ cm.

Matematiska uppgifter för reallinjen

Allmän kurs[1]

1. Lös ekvationen $\sin x+3\cos x=2$.
2. En höjd i ett parallelltrapets med den mindre av de parallella sidorna $=a$ och den större $=b$ är delad i förhållandet 1 : 2 från den större av de parallella sidorna räknat. Beräkna längden av parallelltransversalen genom delningspunkten.
3. Ett lån på 30 000 kr skall amorteras på följande sätt. Vid slutet av vart och ett av de 10 första åren betalas 5 % av det ursprungliga lånebeloppet. Vid slutet av det tionde året betalas *dessutom* en så stor summa, att återstoden av lånebeloppet med lika stora årliga avbetalningar som förut — och vid samma tidpunkt på året som förut — blir fullständigt betald på 15 år. Räntefoten under de första 10 åren är 4 %, under de 15 övriga åren 3 %. Hur stor var den summa, som utöver den vanliga avbetalningen erlades vid slutet av det tionde året?
4. En sfär är inskriven i en stympad reguljär fyrsidig pyramid, vars volym är tre gånger så stor som sfärens. Hur stor är den stympade pyramidens hela yta i förhållande till sfärens yta?

[1] Uppg. 2—5 gåvos, med andra sifferuppgifter, i studentskrivningen å reall. v. t. 1923.

5. Från två orter, som ligga på samma meridian och vilkas geografiska breddskillnad är 82° 40′ (Kap Farvel på Grönland och Rio de Janeiro), observeras månen samtidigt, då den passerar meridianen. Månens höjd över horisonten befinnes vara på Kap Farvel 43° 26′ och i Rio de Janeiro 52° 39′. Beräkna härav månens avstånd från Rio de Janeiro vid tillfället i fråga. (Jorden antages vara sfärisk och dess radie=6366 km.)
6. Undersök kurvan $y=x^3+ax^2+a^3$, där a är en konstant, med avseende på maximi- och minimipunkter. Ange med tillhjälp härav, vilka huvudtyper kurvan uppvisar och för vilka värden på a dessa förekomma. Upprita slutligen exempel på de olika huvudtyperna.
7. Hörnet A i triangeln ABC ligger i punkten (4; 4), och höjden från A eller dess förlängning går genom origo. Medianen från hörnet B har ekvationen $y+2=0$, och ytan av den triangel, som begränsas av AB, AC och x-axeln, är 10 ytenheter. Bestäm koordinaterna för hörnen B och C i de båda fall, som äro möjliga.
8. En kropp består av en rät cirkulär cylinder med basradien x cm och höjden y cm samt en ovanpå cylindern placerad halvsfär med radien kx cm, där k är en konstant, som är $\geqq 1$. Halvsfärens plana yta vilar mot cylinderns cirkulära yta, och dess medelpunkt sammanfaller med sistnämnda ytas medelpunkt. Den på detta sätt sammansatta kroppen har en total begränsningsyta av 27π cm^2. Undersök först, mellan vilka gränser x kan variera. Undersök därefter för $k=1{,}25$, hur den sammansatta kroppens volym varierar, då x genomlöper de värden, som x kan anta, och åskådliggör grafiskt i stora drag, hur den ifrågavarande volymen i detta fall varierar. — Det erfordras icke men betraktas som en förtjänst, om en undersökning göres, hur i det allmänna fallet volymen och dess grafiska representation ändras för olika värden på konstanten k.

Resultat: **1.** $69{,}20° + n \cdot 360°$; $327{,}66° + n \cdot 360°$. **2.** $\frac{1}{3}(a+2b)$. **3.** 8490 kr. **4.** 3 ggr så stor. — Om den stympade pyramidens hela yta är A och inskrivna sfärens radie är r, erhålles ur förutsättningen $\frac{1}{8} \cdot Ar = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$, varav $A = 3 \cdot 4\pi r^2$. **5.** 384 000 km. **6.** Derivatan har nollställena I (0; a^3) och II ($-\frac{2}{3}a$; $\frac{31}{27}a^3$). **1.** För $a > 0$ är I min. och II max. **2.** För $a < 0$ är I max och II min. **3.** För $a=0$ infl. i (0; 0). **7.** $B(-5; -2)$ och $C(1; -8)$ eller $B(25; -2)$ och $C(31; -8)$. — Om $\triangle ABC = T$ ytenh., så är den i texten angivna triangeln (10 ytenh.) $= \left(\frac{4}{6}\right)^2 \cdot \frac{T}{2}$, dvs. $T=45$, varav medianen från $B=7{,}5$. En

linje genom A, parallell med BC skär $y+2=0$ i D (10; -2). Pgm $ABCD=2T$, varför $BD=15$. Härav B:s x-korod.$=10-15=$ $=-5$ eller $10+15=25$. Pgm:s mittp. (2,5; -2) och (17,5; -2) ger omedelbart C. 8. Totala ytan är $3\pi k^2x^2+2\pi xy=27\pi$, varav $xy=$ $=\frac{3}{2}(9-k^2x^2)$, (1). Då $y>0$, fås villkoret $0<x<3:k$. Kroppens volym är $V=\frac{2}{3}\pi k^3x^3+\pi x^2y$, som enl. (1) kan skrivas $V=\frac{1}{6}\pi\,[81x-$ $-k^2(9-4k)x^3]$. För $k=1{,}25$ fås $V=\frac{1}{6}\pi(81x-\frac{25}{4}x^3)$. Funktionen växer från värdet 0 för $x=0$ till $\frac{54}{5}\pi\sqrt{3}$ för $x=\frac{6}{5}\cdot\sqrt{3}$ för att avta till 18π för $x=3:k=2{,}4$. På samma sätt varierar V för $1<k<1{,}5$. För $k=1{,}5$ fås max.$=18\pi$ för $x=3:k=2$; för större värden på k växer V monotont (när x går från 0 till $3:k$) från 0 till 18π. För $k=2{,}25$ erhålles räta linjen $V=\frac{27}{2}\cdot\pi x$ för $0<x<\frac{4}{3}$. För $k>2{,}25$ är kurvan det mellan 0 och $3:k$ liggande stycket av en kubisk parabel utan max. och min.

Matematiska uppgifter för reallinjen

Specialkurs

1. I ett rätvinkligt koordinatsystem drages från en fast punkt A (a; 0) på positiva x-axeln en rät linje, som skär y-axeln i punkten B. Från denna punkt drages parallellt med linjen $y=x$ en rät linje, som skär x-axeln i punkten C. Sök och konstruera orten för skärningspunkten mellan AB eller dess förlängning och normalen mot AB från C.
2. I en parabel drages en korda genom fokus. Den mot kordariktningen svarande diametern skär kordan i punkten M och parabeln i punkten N. Sträckan MN har samma längd som parabelns parameter. Bestäm vinkeln mellan kordan och parabelns axel.
3. Visa, att kurvorna $y=f(x)$ och $y=f'(x)$, där $f(x)=3+4\operatorname{tg}x$ och $f'(x)$ är derivatan av $f(x)$ med avseende på x, ha gemensamma tangenter i de punkter, där de skära varandra. Kurvorna uppritas icke.
4. Asymptoterna till hyperbeln $a^2x^2-b^2(y-b)^2=a^2b^2$ tangera ellipsen $b^2x^2+a^2(y+b)^2=a^2b^2$. Bestäm excentriciteten för var och en av de båda kurvorna.
5. Genom ekvationen $4x^2+9y^2+axy+bx+cy+d=0$, där a, b, c och d äro konstanter, bestämmes y som funktion av x. Denna funktion har ett maximum $y=2$ för $x=1$ och ett minimum $y=0$ för $x=2$. Bestäm de ingående konstanterna, och upprita den motsvarande kurvan i stora drag.
6. I en sfärisk sektor, vars medelpunktsvinkel är mindre än 180°, inskrives en rät kon, som har sin spets i kalottens mittpunkt,

höjden utefter en radie i sektorn och basytans omkrets på sektorns koniska yta. Hur stor är sektorns medelpunktsvinkel, när volymen av den största inskrivna konen är $^1/_6$ av sektorns volym?

7. Två motstående sidoytor i en rätvinklig parallellepiped betecknas med $ABCD$ och $A'B'C'D'$, där AA', BB', CC' och DD' äro diagonaler i parallellepipeden. Sidokanterna BC, CD och DB' äro a, b och c respektive. Genom diagonalen AA' lägges ett plan, som skär BC i E och $B'C'$ i E'. Bestäm ytan av fyrhörningen $AEA'E'$ som funktion av sträckan BE, och undersök, hur den varierar, när E rör sig från B till C. — Det erfordras icke men betraktas som en förtjänst, om undersökningen fortsättes för andra lägen av planet genom AA', så att punkten E får röra sig vidare från C över D till B'.

Resultat: **1.** Om O är origo, P ortpunkten och Q y-axelns skärning med CP, så är $\triangle AOB \cong \triangle QOC$ (lika vinklar och $OC=OB$), dvs. $OQ=a$. Orten är alltså en cirkel med AQ som diameter. **2.** 30° (två kordor). — Tangenten i N (som skär parabelns axel i N_1) är parallell med kordan, varför $MN=FN_1$ osv. **4.** $\sqrt{\sqrt{3}+1}=1{,}653$ och $\frac{1}{3}\sqrt{9-3\sqrt{3}}=0{,}650$. **5.** $a=4$, $b=-16$, $c=-24$, $d=16$. Kurvan är en ellips, snett inskriven i den rektangel som bildas av koord.-axlarna och linjerna $x=3$, $y=2$. — Uppgiften kan behandlas utan derivering. Man löser ekv. m. a. p. x och beaktar, att de givna max.- och min.-värdena motsvara lika x-rötter. Sedan konstanterna bestämts, löses ekv. m. a. p. y, då man får $9y=-(2x-12)\pm \pm\sqrt{32x(3-x)}$, varav $x_{\text{min.}}=0$ och $x_{\text{max.}}=3$. **6.** 44,67°. **7.** Då E rör sig från B till C, avtar ytan från $b\sqrt{c^2+a^2}$ till min. $=bc\sqrt{a^2+b^2+c^2}:\sqrt{b^2+c^2}$ för $BE=ab^2:(b^2+c^2)$ för att sedan växa till $c\sqrt{a^2+b^2}$. Permuteras a, b och c, fås variationerna i övriga fall. — Om $BE=x$, erhålles $AE=\sqrt{x^2+b^2}$, $A'E=\sqrt{(a-x)^2+c^2}$. Höjden EF mot AA', beräknas ur rätvinkliga trianglar, varefter man studerar EF:s variation. — Se även detta häfte sid. 132. »Om trerektangulärt hörn».

Uppgifter i fysik[1]

Lösningarna till uppgifterna 2 och 5—8 böra åtföljas av enkla figurer.

1. Ett kraftverk har som vattenmagasin en sjö med ytan 45 km². Hur många kWh kunna utvinnas genom att sjön avtappas, så att vattenytan sjunker 1 cm? Man bortser därvid från de änd-

[1] *Rättelse:* I svaret till uppg. 2, jan. 1951, marsh. s. 80 bör stå: Kraften $=2{,}8:(6-x)$ kp.

ringar i vattenståndet, som kunna uppkomma av andra anledningar. Vattnets fallhöjd vid kraftverket kan med tillräcklig noggrannhet uppskattas till 7,5 m och anläggningens verkningsgrad till 70 %. 1 kpm=9,8 joule.

2. Medelst ett plant snitt genom en homogen, rät och cirkulär cylinders axel har cylindern delats i två hälfter. En av dessa placeras med den rektangulära, plana ytan horisontell. Mantelytan stöder därvid mot två med cylinderaxeln parallella, smala skenor, vilka ligga i samma horisontalplan och på sådant inbördes avstånd, att cylinderradierna till de båda skenorna bilda rät vinkel med varandra. Vrides kroppen kring cylinderaxeln, kvarligger den till att börja med på grund av friktionen vid skenorna i sitt nya läge. Vilken är den största vinkel, som den rektangulära ytan kan bilda med horisontalplanet? Friktionskoefficienten är 0,10. En homogen halvcylinders tyngdpunkt ligger på avståndet $\frac{4r}{3\pi}$ från axeln.
3. Ett fartyg antages röra sig utmed den geografiska ekvatoriallinjen. Tyngdkraftens acceleration ombord erhåller därvid på grund av ändring i centrifugalkraften ett annat värde än då båten ligger stilla. Beräkna skillnaden mellan värdena på tyngdkraftens acceleration, då båten rör sig åt väster och då den rör sig åt öster, i båda fallen med en hastighet av 20 knop. 1 knop=1,85 km/tim. Jorden roterar ett varv kring sin axel på 86 164 sek (ett stjärndygn). Man förutsätter, att havsströmmar och vindar ej påverka fartygets rörelse.
4. Vid en laboration skulle man bestämma isens smältvärme. Därvid användes en termosflaska, försedd med omrörare, termometer och en isolerad motståndsspiral, som kunde lämna effekten 67,0 W. I flaskan fanns också från början en viss mängd vatten. En lärjunges laborationsprotokoll innehöll följande: Begynnelsetemperatur=18,7° C. I termosflaskan nedfördes 36,0 g väl avtorkad, 0-gradig is. Strömmen genom spiralen slöts under 240 sek. Efter omröring erhölls sluttemperaturen 19,2°. Härefter nedfördes ytterligare 45,0 g 0-gradig is, och strömmen slöts under 240 sek. Sluttemperaturen efter omröring blev nu 18,2°. Vilket värde på isens smältvärme erhöll laboranten?
5. En vertikal glasskiva, försedd med två fina, horisontella, svarta streck, uppsattes på en optisk bänk och belystes. Strecken avbildades därefter med hjälp av en samlingslins på en vit skärm med mm-gradering och horisontella delstreck. Avståndet mellan de svarta strecken blev på bilden 24 mm. Mellan samlingslinsen och skärmen, 80 mm från den senare, insköts därefter en tunn

spridningslins. För att strecken nu skulle tydligt avbildas, måste skärmen flyttas ett stycke. Avståndet mellan de svarta strecken på bilden blev denna gång 40 mm. Beräkna spridningslinsens dioptrital. Glasskivan och skärmen äro vinkelräta mot linsernas gemensamma huvudaxel.

6. En tunn, bikonvex glaslins, där vardera linsytans radie är r, är på den ena ytan försedd med en speglande beläggning. Linsen kan därefter tjänstgöra som en konkavspegel. Beräkna dennas brännvidd, om glasets brytningsexponent antages vara $^3/_2$.
7. Två ackumulatorbatterier, det ena med elektromotoriska kraften 50,0 V, det andra med elektromotoriska kraften 40,0 V, skulle vid ett tillfälle parallellkopplas och under kortare tid samverka, så att de lämnade lika stark ström. För den skull inkopplades ett motstånd i serie med det större batteriet. Utåt skulle batterierna leverera sammanlagt 200 W. Hur stort måste det inkopplade motståndet tagas? Man bortser från batteriernas inre motstånd och motstånden hos alla tilledningstrådar.
8. En lärjunge hade fått till uppgift att bestämma de elektromotoriska krafterna, e_1 och e_2, hos två ackumulatorer, A_1 och A_2. Till hans förfogande ställdes två proppreostater, P_1 och P_2, samt en galvanometer. Den senares motstånd var 100 ohm, och varje delstrecks utslag svarade mot strömstyrkan $2{,}00 \cdot 10^{-6}$ A. Han förfor nu på följande sätt. En sluten strömkrets bildades genom att A_1 och A_2 kopplades i serie med varandra och med proppreostaterna; P_1 befann sig därvid närmast A_1. Galvanometern inkopplades i en ledning mellan M och N, där M var en punkt på ledningen mellan A_1:s negativa pol och A_2:s positiva pol och N en punkt på ledningen mellan P_1 och P_2. Om P_1 och P_2 vardera hade motståndet 4800 ohm, gjorde galvanometern 65,0 skaldelars utslag. Den blev däremot strömlös, om motståndet i P_2 minskades till 3240 ohm. Beräkna härav e_1 och e_2. Ackumulatorernas inre motstånd voro liksom tilledningstrådarnas motstånd mycket små.

Resultat: 1. 6430 kWh. 2. 19,3°. 3. 0,30 cm/sek². — Skillnaden i tyngdkraftens acc.=skillnaden i centripetalacc.=$[(v+v_1)^2-(v-v_1)^2]:r=4vv_1/r$, där v_1 är fartygets hastighet, v jordytans periferihastighet och r=jordradien osv. 4. 80,4 cal/g. 5. −5 dioptrier. 6. $\frac{1}{4}r$. 7. 4 ohm. 8. 2,00 V och 1,35 V. — Första och andra försöken ge resp. e_1-e_2 och e_1/e_2.

Realexamen v. t. 1951

Provräkning

1. Ett passagerarfartyg gick från Göteborg till Frederikshavn på Jylland på 3 tim 20 min. Avståndet mellan städerna är 80 km. En snabbgående motorbåt, som gjorde en fart av 1 km i minuten, avgick från Göteborg så mycket senare, att båda båtarna kommo till Frederikshavn samtidigt. Hur långt hade passagerarfartyget hunnit, när motorbåten avgick från Göteborg?
2. En pojke ville göra en saltlösning med lika stor salthalt som Döda havets, nämligen 22 %. Han löste 2,2 kg salt i 10 kg vatten men förstod sedan, att han tagit för litet salt. Hur mycket salt skulle han ytterligare tillsätta för att få den önskade salthalten?
3. Lös ekvationen $\frac{x^2}{\frac{2x^2}{3}-\frac{3}{2}}+\frac{6x-3}{4x+6}-3=0$.
4. En person köpte den 21 mars 4 % obligationer till 105 % kurs. Ränteterminerna äro $^{15}/_{2}$ och $^{15}/_{8}$. Tre månader senare sålde han obligationerna till 106 % kurs. Efter vilken räntefot kan han anses ha haft sina pengar placerade under den tid han ägde obligationerna?
5. En svensk affärsman får betala 18 shillings 11 pence per pound vid köp av en viss sort ullgarn från England. Inköpskostnaderna uppgå till 5,15 kr per kg. Vilket försäljningspris skall han sätta på 1 hg av detta garn, om han beräknar 20 % pålägg? 20 shillings=14,52 kr. 1 shilling=12 pence. 1 pound=0,454 kg.
6. Ett korkflöte till en metrev kan anses sammansatt av ett halvklot och en rät cirkulär kon med de lika stora plana ytorna mot varandra. Flötets största längd är 6 cm och de plana ytornas diameter 4 cm. Beräkna dess vikt, när 1 cm^3 kork väger 0,5 g. $\pi=3{,}14$.
7. Två cirklar med radierna 15 cm och 20 cm skära varandra, så att den gemensamma kordan blir 24 cm. De gemensamma tangenterna till cirklarna dragas. Beräkna det kortaste avståndet från dessa tangenters skärningspunkt till den gemensamma kordan.
8. Två vinkelhakar för linearritning, den ena i form av en likbent rätvinklig triangel och den andra med vinklarna 30°, 60° och 90°, ha lika långa hypotenusor av längden 2 dm. De läggas på ett bord, så att hypotenusorna sammanfalla och vinkelhakarna vändas åt olika håll. Hur stort är avståndet mellan de räta vinklarnas spetsar?

Resultat: 1. 48 km. 2. 0,62 kg. 3. $x=2\frac{5}{8}$. 4. 7,6 %. 5. 4,25 kr/hg. 6. 16,75 g. 7. 84 cm eller 12 cm. 8. $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})=1{,}93$ dm.

Uppgifter i fysik för tekniska linjen

Lösningarna till uppgifterna 2 och 8 böra åtföljas av enkla figurer.

1. Man ville bestämma tjockleken hos ett aluminiumblad och klippte för den skull ut ett rektangulärt stycke med sidorna 50 och 200 mm. Efter vägning rullades stycket löst samman, fästes i en fin tråd och sänktes fullständigt ned i bensin. Bensinens lyftkraft blev 0,165 p. Beräkna härav bladets tjocklek. Bensinens täthet är 0,75 g/cm³.
2. Två pojkar skola lyfta ett bord för att flytta det ett stycke åt sidan. Bordet väger 36 kg. Bordskivan är rektangulär, 1,8 m lång och ca 0,6 m bred. Pojkarna fatta tag i var sin kortända av skivan. Mitt på bordet står en låda, vägande 24 kg och med basytan 4×4 dm. Det visar sig emellertid, att den ene pojken inte orkar med en börda på 30 kp. De skjuta därför lådan 6 dm åt den andres håll, varvid det ännu återstår 1 dm, innan lådan kommer kant i kant med bordets kortsida. Sedan lyfta de bordet med lådan i detta läge. Hur stor kraft behöver den svagare pojken nu använda?
3. En spårvagn av den typ, som användes i en av våra städer, väger normalt 12 t. Den framföres på en rak, horisontell sträcka med en hastighet, som uppgår till 18 km/tim, då strömmen till motorn brytes. Samtidigt sättas bromsarna till. En passagerare observerar, att det från detta ögonblick tar 8 sek, innan spårvagnen stannar vid närmaste hållplats. Friktionsmotstånden uppgå till 0,8 % av vagnens tyngd. Om man antar, att spårvagnsföraren anbringar en konstant bromskraft utöver nämnda motstånd, hur stor måste denna kraft vara? Tyngdkraftens acceleration är 9,8 m/sek².
4. En gasbehållare, rymmande 60 l, pumpas lufttom. Från en syrgastub med 20 l volym fylles den sedan med syrgas. Trycket i tuben är från början 62 kp/cm² och sjunker till 50 kp/cm². Beräkna trycket i behållaren efter påfyllningen. Temperaturen är konstant.
5. Under en lektion hade man tillgång till flytande luft i en termosflaska. För att ungefärligt bestämma dess temperatur använde man följande metod. I en mässingskalorimeter, som jämte en omrörare vägde 40 g, hälldes 96 g vatten. En stålkula, som vägde 40 g, upphängdes i en fin tråd och sänktes ned i den

flytande luften under så lång tid, att man var övertygad om att kulan antagit vätskans temperatur. Kalorimetervattnets begynnelsetemperatur uppmättes till 22,2° C. Stålkulan fördes därefter hastigt ned i vattnet. Efter omröring fann man blandningstemperaturen vara 15,0° C. Vilket värde på den flytande luftens temperatur erhöll man av försöket? Specifika värmet för kalorimetern med omrörare kan sättas=0,1. Inom det temperaturområde, varom är fråga, gäller 0,090 som värde på stålets spec. värme.

6. I en verkstad har man för uppvärmningen under vintern brukat använda värmeelement, som sammanlagt avge högst 5000 kcal/tim. Man tänker nu för verkstadsdriften anskaffa en förbränningsmotor, som avger en mekanisk effekt av 10 hk. Endast 21 % av den vid förbränningen alstrade energien omsättes till mekaniskt arbete. Man räknar emellertid med att kunna använda 20 % av förbränningsenergien för lokalens uppvärmning. Behöver man, då motorn är i gång, använda värmeelementen för uppvärmning av verkstaden? 1 hk=75 kpm/sek. Den mekaniska värmeekvivalenten är 427 kpm/kcal.
7. Man ville för kalorimeterförsök tillverka en motståndsspiral av en ledningstråd, vars motstånd per m var 7,0 ohm. Spiralen skulle över praktiskt taget motståndslösa ledningar anslutas till ett ackumulatorbatteri med den konstanta polspänningen 6,3 V och utveckla 120 cal/min. Hur lång borde motståndstråden tagas? 1 wattsek=0,24 cal.
8. Mellan polerna, *A* och *C*, i ett likströmsnät, är spänningen konstant. Man inkopplar i serie två motstånd, *AB* på 27 000 ohm och *BC* på 10 000 ohm. En voltmeter med 15 000 ohms motstånd anslutes till ändpunkterna av motståndet *BC*. Voltmetern anger därvid en spänning av 40 V. Hur stor var spänningen mellan *B* och *C*, innan voltmetern inkopplades?

Resultat: 1. 0,022 mm. 2. 22 kp. 3. 670 kp. 4. 4 kp/cm². 5. −185° C. 6. Motorn avger 6022 kcal/tim; värmeelement behövs ej. 7. 0,68 m. 8. 59,5 volt.

Beskrivande maskin- och byggnadslära

1. Hur lång får en pelare i form av en I-balk av normalprofil nr 20 högst vara för att med 4-faldig säkerhet mot knäckning bära en last av 10 Mp? E=21 000 kp/mm².
2. En axeltapp med 78 mm diameter upptar en belastning av 9 Mp och roterar i ett glidlager med 180 r/m. Friktionskoefficienten

är 0,04. Lagret kyles med vatten, vars temperaturhöjning vid passagen genom lagrets kylmantel utgör 5° C. Hur stor är vattenåtgången per timme?

3. En snickerifabrik eldar bl. a. med ekavfall, vars värmevärde är 4050 kcal/kg. För övrigt eldas med ribbved, som har ett värmevärde av 2510 kcal/kg och kostar 13 kronor per m^3. En garvämnesfabrik önskar köpa ekavfallet för sin fabrikation. Hur mycket skall snickerifabriken begära per ton för att icke förlora på affären? Ribbveden väger 300 kg/m^3.
4. Vid grovsvarvning av en hjulring med 400 mm diameter är spånarean 4 mm^2 och specifika skärkraften 180 kp/mm^2. Spindelns varvtal är 18,3 r/m. Beräkna den effekt i kW, som fordras för svarvningen, om verkningsgraden är 60 %.
5. Ett fartyg, vars tyngd är 150 Mp drages upp på en slip med hjälp av två plattgängade skruvar, som äro gjorda av stål med en tillåten spänning av 600 kp/cm^2. Kärndiametern är 80 % av ytterdiametern och gängan har kvadratiskt tvärsnitt. Fartygets motstånd vid uppdragningen är 20 % av dess tyngd. Beräkna skruvarnas diameter och skissera en skärning av skruven i skala 1 : 1.
6. Ett flygplan med 1600 hk motorer och en marschhastighet av 500 km/h skall flyga från Europa till Amerika, en sträcka på 5800 km. Bensinens värmevärde är 10 510 kcal/kg och dess täthet 0,72 kg/dm^3. Motorverkningsgraden är 27 %. Hur många liter bensin måste planet minst ha ombord vid starten?
7. En kvadratisk träbjälke är i ena ändan fast inspänd i en vägg och i den andra ändan belastad med en kraft F kp. Den får då en viss nedböjning. Emellertid vill man ha nedböjningen endast hälften så stor och vill därför byta ut bjälken mot en grövre. Hur många procent större skall man taga kvadratens sida på den nya bjälken?
8. En kuggväxel skall beräknas för ett visst effektbelopp och vissa varvtal och dessa värden få ej ändras. Man har vid den första beräkningen funnit, att växeln blir så stor, att man icke får rum med den på det utrymme, man har. Man måste då ändra på de förutsättningar, som man gjort vid den första beräkningen. Giv ett förslag på de förutsättningar, som man skulle kunna utgå från vid den följande omräkningen.

Resultat: 1. 246 cm. 2. 446 liter/tim. 3. 70 kr/ton. 4. 4,5 kW. 5. Kärndiameter 57 mm, ytterdiameter 71 mm. 6. 5740 liter. 7. 19 %. 8. Bättre material; bredden ökas om möjligt; modulen ökas under samtidig minskning av kuggantalen.

Insänd litteratur

J. W. Cell, *Analytic Geometry*, 2nd Ed. J. Wiley & Sons, New York 1951, Pp. 326, $ 3.75.

H. P. Phillips, *Differential Equations*. Third Ed., J. Wiley & Sons, New York 1951, Pp. 149, $ 3.00.

W. Wilson, *A Hundred Years of Physics*. Duckworth & Co, London 1950, Pp. 119, 21 s. 6 d. net.

Erwin Schrödinger, *Space-Time Structure*. Cambridge Univ. Press. 1950, Pp. 119, 21 s. 6d. net.

C. Candler, *Modern Interferometers*. Hilger & Watts, London 1951, Pp. 502, 57 s. 6 d. net.

Paul Lévy, *Problèmes concrets d'analyse fonctionelle*. Second èd. Gauthier-Villars, Paris 1951, 484 p.

René Garnier, *Cours de cinematique*. Tome III. Géométrie et cinématique Cayleyennes. Gauthier-Villars, Paris 1951, 376 p.

Gustave Verriet, *Introduction a la géométrie euclidienne par la méthode élémentaire*. Gauthier-Villars, Paris 1951, 193 p., 1000 fr.

H. Beghin et G. Julia, *Exercices de mécanique*, Tome I: 2, Gauthier-Villars, Paris 1951, p. 339- p. 581.

Fernand Gallais, *Chimie minérale théorique et expérimentale*. Masson & Cie, 809 p., 2800 fr.

N. Bourbaki, *Fonctions d'une variable réelle*, Actualités Scientifiques et Industrielles No. 1032. Hermann & Cie, Paris 1951, 200 p.

André Delachet et Jean Taillé, *La balistique*. Presses Universitaires de France, Paris 1951, 127 p.

G. Bouligard, *L'accès aux principes de la géométrie Euclidienne*. Librarie Vuibert, Paris 1951, 88 p., 320 fr.

Helmut Hasse, *Höhere Algebra*, Dritte Aufl. I. Lineare Gleichungen, 152, S., II. Gleichungen höheren Grades, 158 S., je Band DM 2: 40. Sammlung Göschen, Bd. 931, 932. Walter de Gruyter, Berlin 1950.

P. Frauenfelder und P. Huber, *Einführung in die Physik*. I. Mechanik, Hydromechanik, Thermodynamik. E. Reinhardt Verlag, Basel, 1951, 429 S., Schw. Fr. 18: 50.

O. Lindstad, *Veiledning i skoleforsøk i mekanikk og elektrisitetslære*. Norsk Lektorlags faglig-pedagogiske skrifter Nr. 3. Stencilerad, Oslo 1951, 91, s., nkr. 5: —.

T. Bjerge, *Elektricitet og magnetisme*, 3:e udgave. E. Munksgaard, København 1951, 264 s.

I. Bolin — B. Gustaver, *Att laborera hemma*, Del II. »Teknik för allas» handböcker nr 17, Stockholm 1951, 80 s., kr. 3: 75.

H. McKay, Leksaker och uppfinningar. Natur & Kultur, Stockholm 1951, 188 s., kr. 7: 50.

K. A. Wingårdh, *Underliga ämnen*. Natur & Kultur, Stockholm 1951, 175 s., kr. 5: 50.

Cassiopeia, Tycho Brahe Sällskapets årsbok 1950—1951, Lund 1951, 96 s., kr. 14: —.

Ingenjörshandboken, Register till delarna 1—5. Nordisk Rotogravyr, Stockholm 1951, 96 s., kr. 4: —.

Lärarekurs i fysik och elektroteknik juni 1948. Del II. Särtryck ur tidningen »Norden». Kungl. Överstyrelsen för yrkesutbildning, Stockholm 1950, 32 s.

Nu åter i bokhandeln

MEKANISK TEKNOLOGI

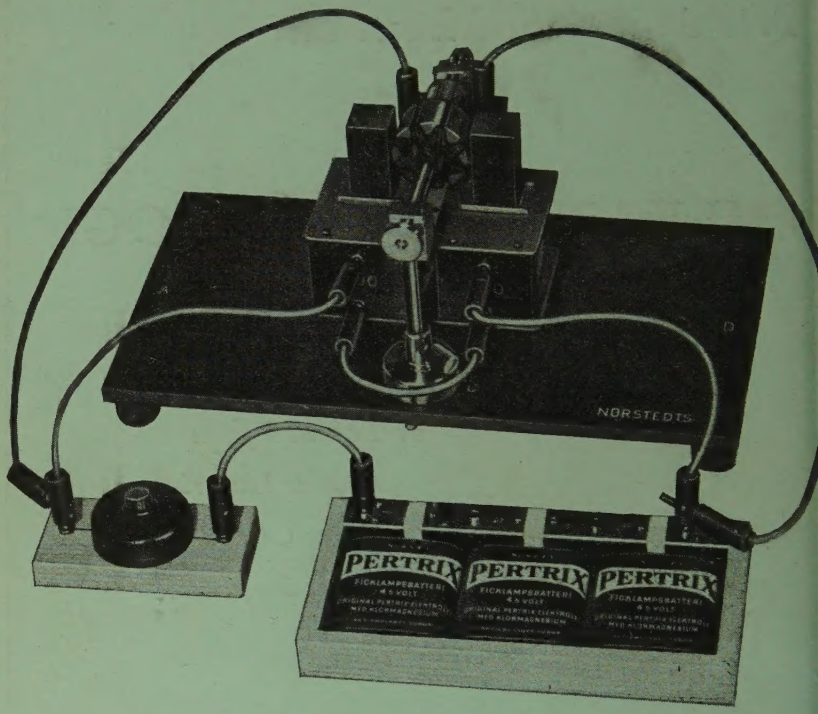
den fjärde upplagan

av *Lennart Elfman*
Gunnar Lindqvist
Birger Carlson
Oskar Stage

Inbunden 13 kr. 75 öre
Lärarexemplar 11 kr.

SVENSKA BOKFÖRLAGET
Drottninggatan 20 -:- Stockholm

Materiel för elevlaborationer



Elektrisk motor byggd med delar ur den elektriska laborationssatsen.

Med Norstedts laborationssatser kan laborationer utföras inom matematik, värmelära, optik, elektricitetslära och kemi.

Materielen förvaras i specialinredda trälådor och på plintar avsedda för 6, 8 eller 10 grupper.

Prisuppgift och beskrivning på begäran.

P. A. NORSTEDT & SÖNER

Skolavdelningen - Box 898 - Stockholm 1

Lund 1951, Håkan Ohlssons boktryckeri.